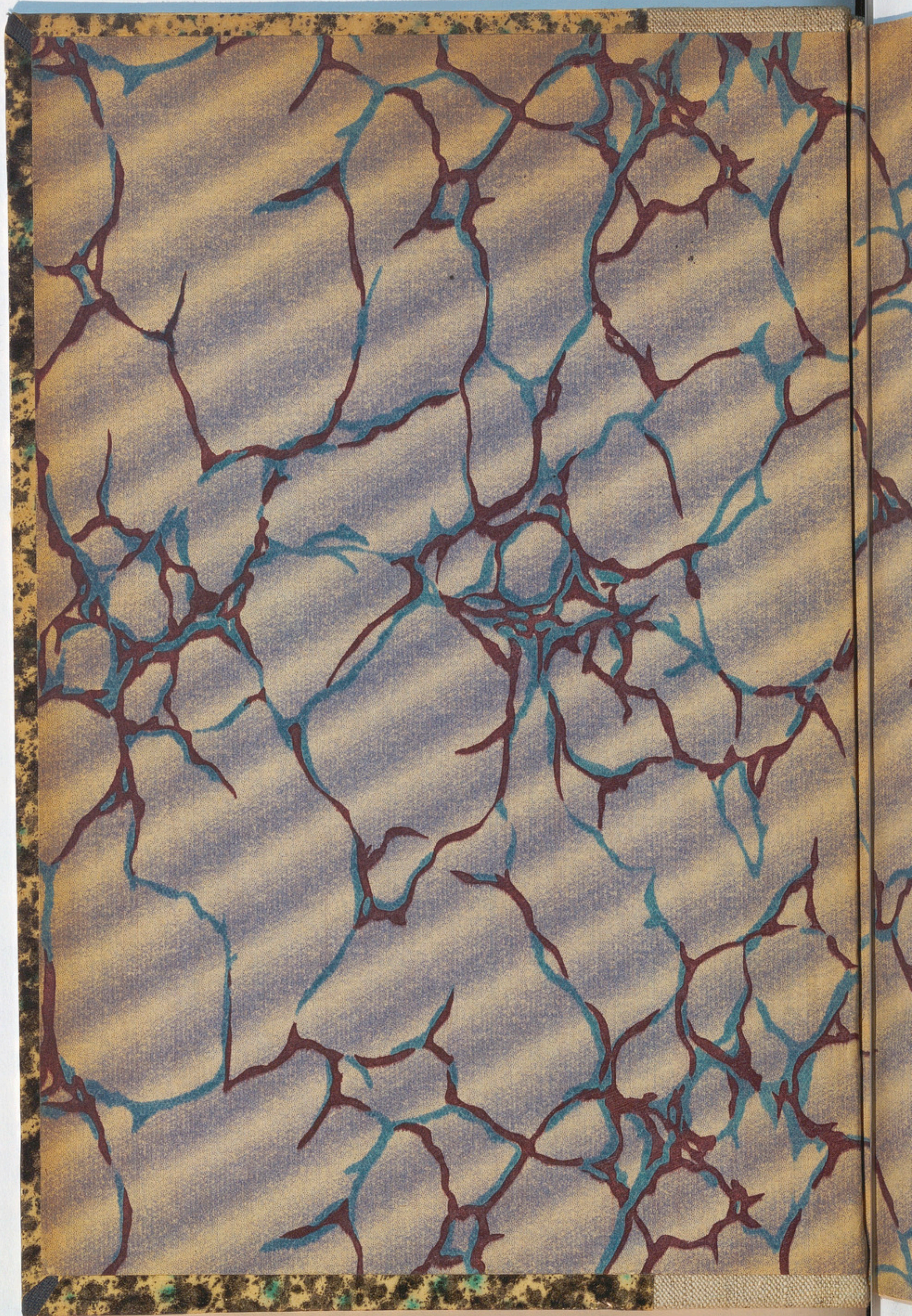
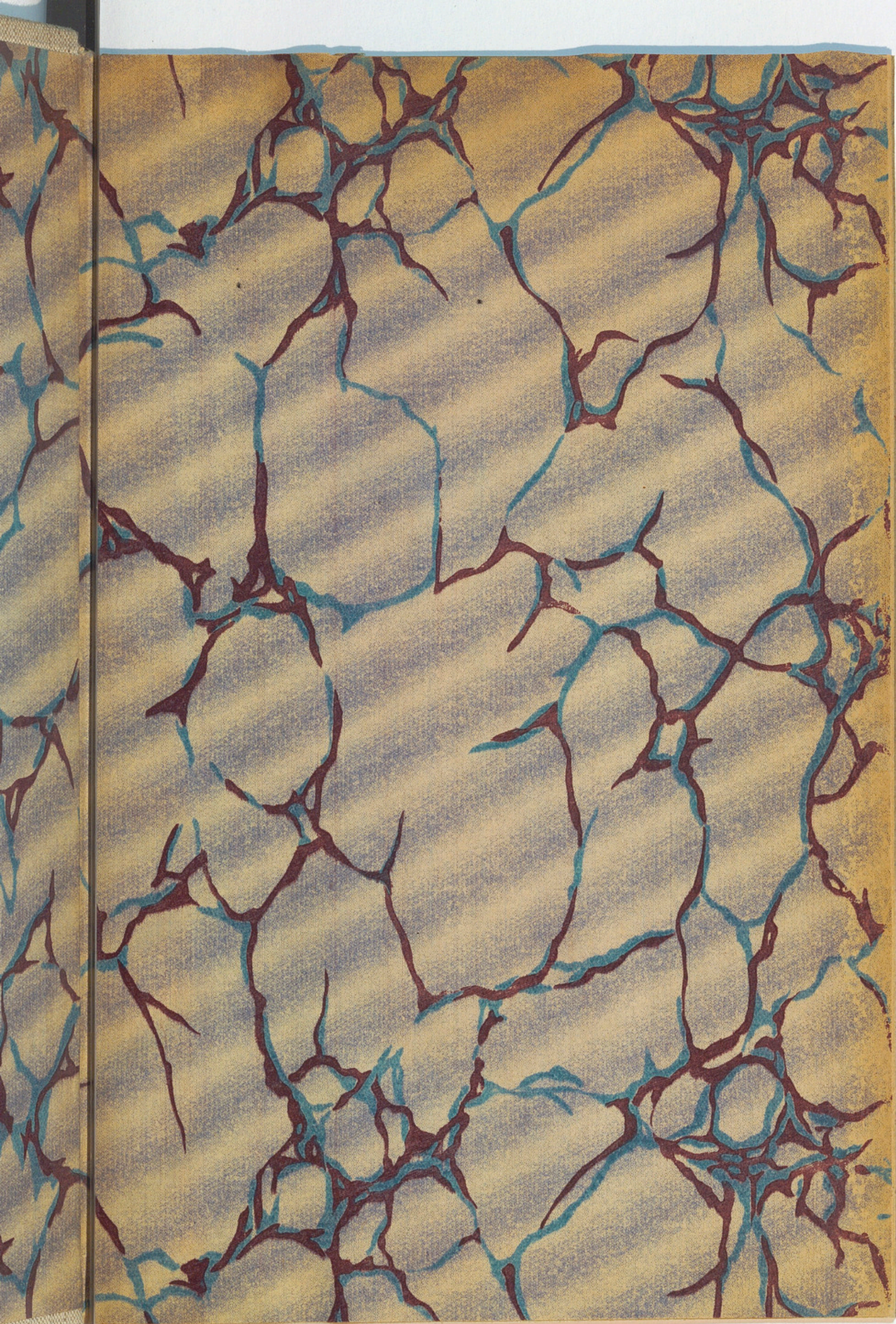
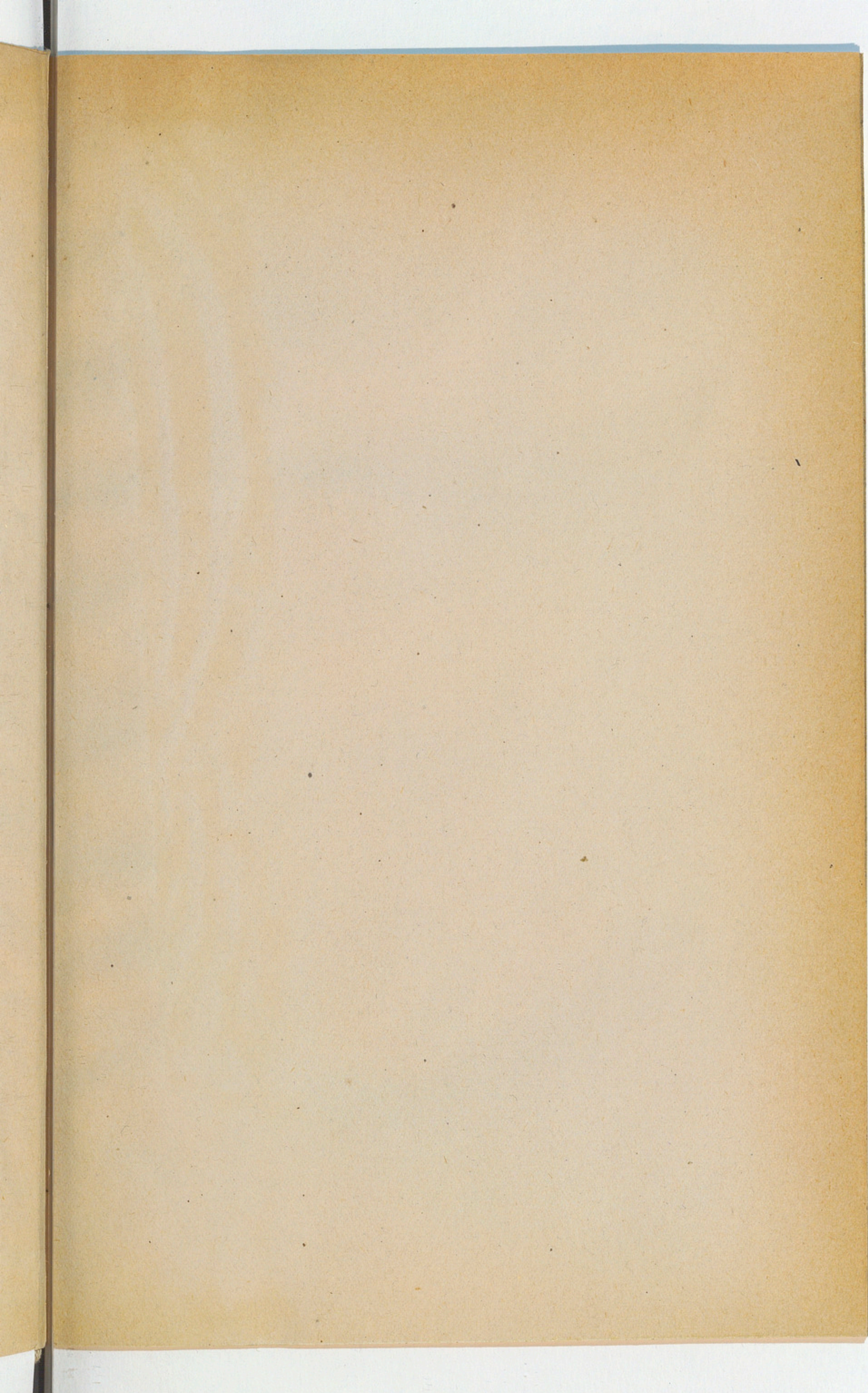
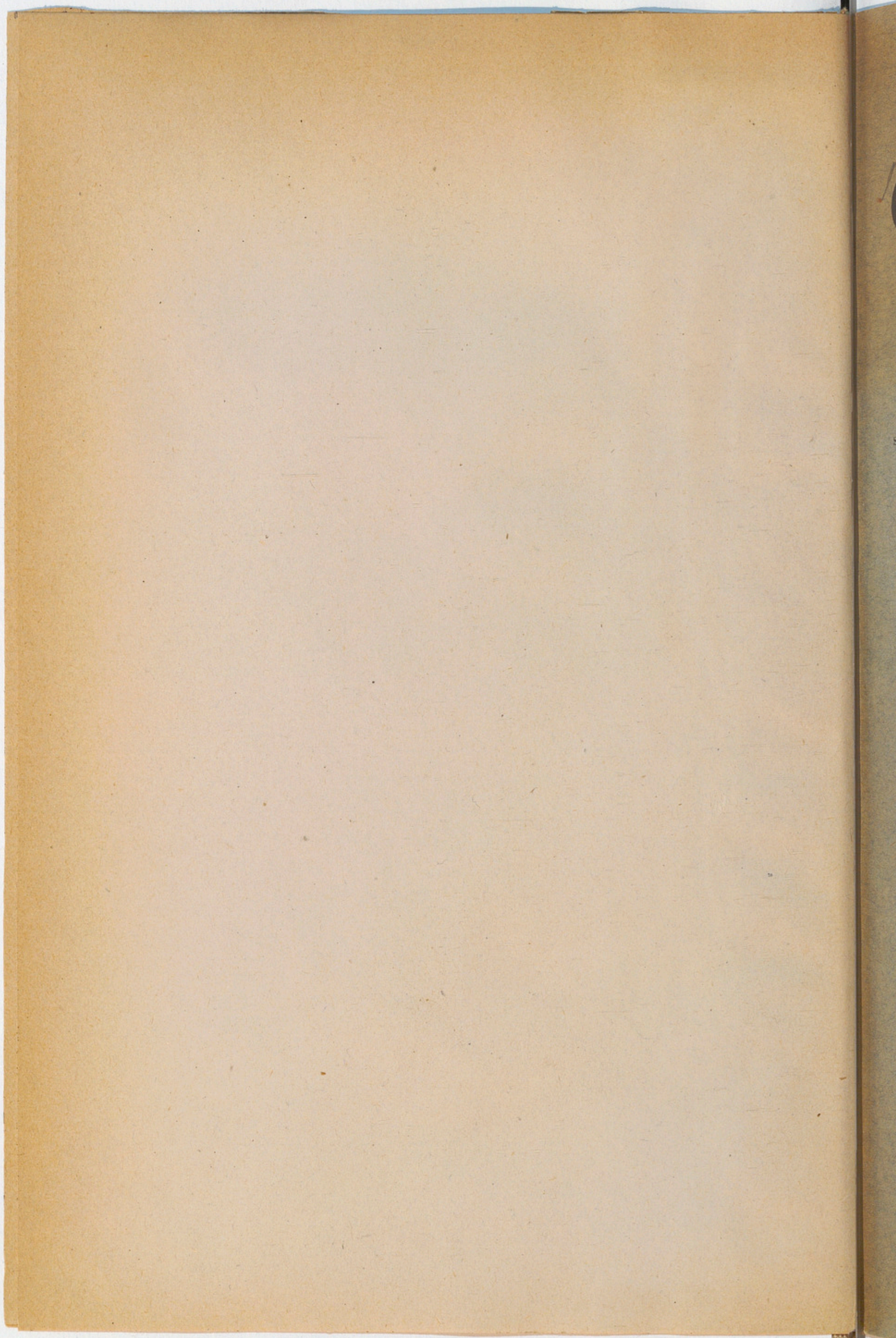


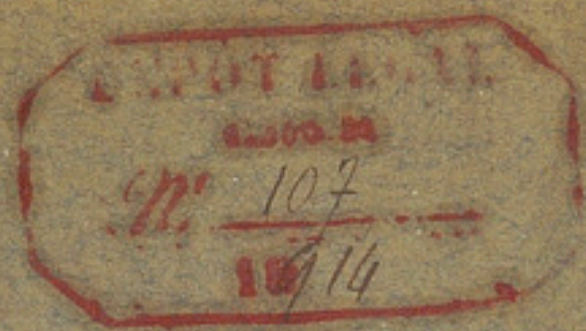












ŒUVRES MATHÉMATIQUES

DE

JEAN DOLBNI~~A~~

PUBLIÉES

sous les Auspices de l'École Supérieure des Mines de l'Impératrice Catherine II
à St-Petersbourg

Avec une Préface de GASTON DARBOUX

Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris

ET UNE

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE DOLBNI~~A~~

PAR

NICOLAS KRYLOFF

Professeur d'Analyse à l'École Supérieure des Mines de St-Petersbourg

749

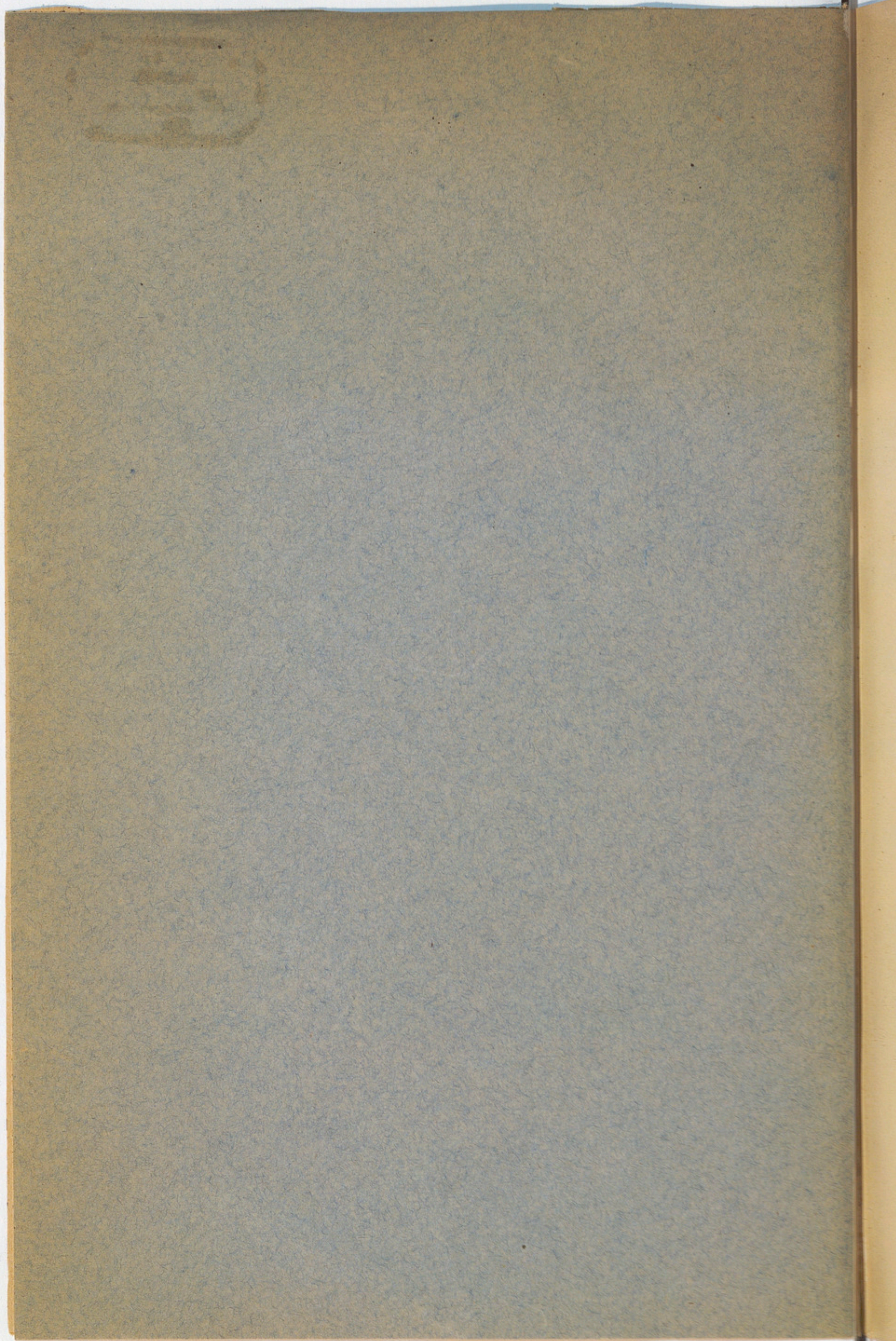
PARIS

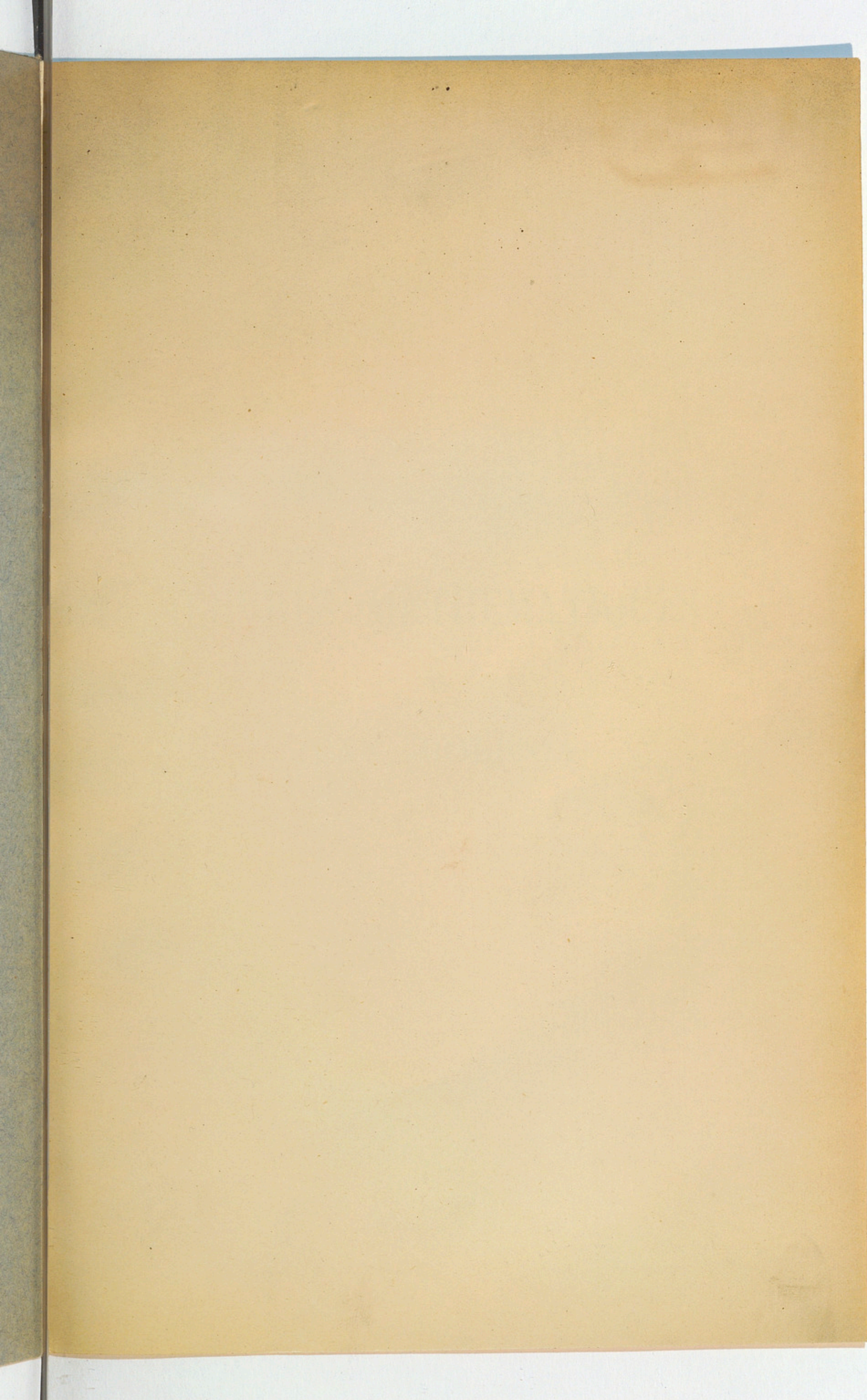
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1913





8°
37

ŒUVRES MATHÉMATIQUES

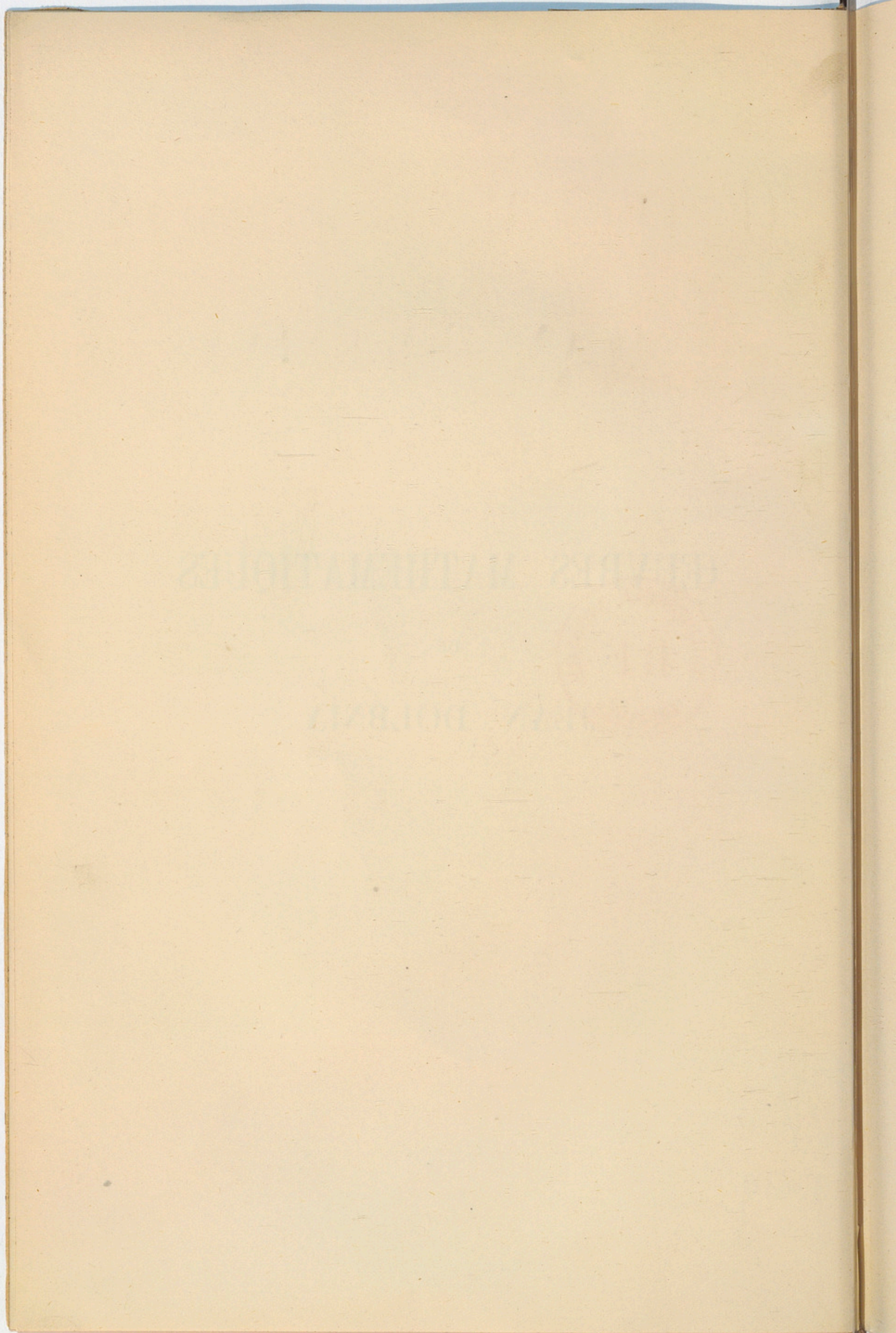


DE

JEAN DOLBORNIA

8° V

37619



ŒUVRES MATHÉMATIQUES

DE

JEAN DOLBIA

PUBLIÉES

sous les Auspices de l'École Supérieure des Mines de l'Impératrice Catherine II
à St-Petersbourg

Avec une Préface de GASTON DARBOUX

Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris

ET UNE

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE DOLBIA

PAR

NICOLAS KRYLOFF

Professeur d'Analyse à l'École Supérieure des Mines de St-Petersbourg

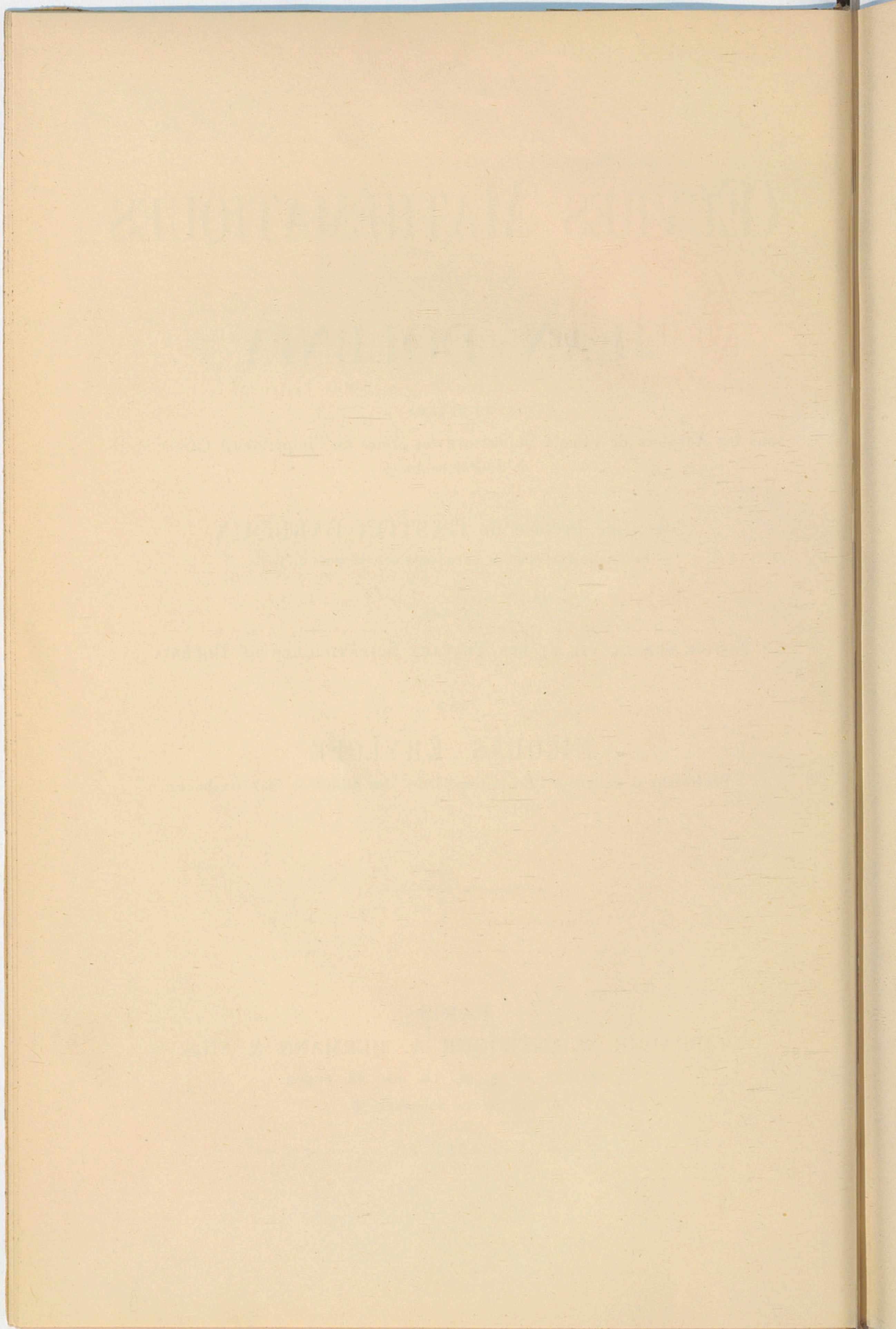
PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

—
1913



PRÉFACE DE M. GASTON DARBOUX

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
DIRECTEUR DU BULLETIN
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Il y a aujourd'hui plus de trente ans, je commençai à recevoir des Mémoires d'un jeune géomètre Russe, que je n'avais pas l'honneur de connaître. Ce géomètre, à peine âgé de trente ans, était précisément M. Jean DOLBIA dont l'Ecole Supérieure des Mines de St-Petersbourg publie les œuvres par les soins de M. N. KRYLOFF. Les lettres d'envoi qui accompagnaient ces Mémoires, n'étaient accompagnées d'aucun détail biographique, ni d'aucune indication bien développée sur la position de leur auteur; mais les Mémoires étaient admirablement rédigés, dans un français très pur et très élégant, et ils roulaient sur les théories les plus élevées et les plus délicates de l'Analyse. C'était plus qu'il n'en fallait pour que ces Mémoires fussent bien accueillis; je m'empressai donc de les publier bien que leur étendue dépassât quelquefois les limites qui sont imposées à nos articles de *Mélanges du Bulletin des Sciences Mathématiques*. Avant de les imprimer, je les lisais moi-même, ou bien je les faisais lire à quelqu'un de mes collabo-

rateurs, qui me les renvoyait toujours en me présentant de les faire connaître au public mathématique. La belle Notice sur la vie et les travaux scientifiques de Jean DOLBIA que le lecteur lira dans ce volume, m'a fait mieux connaître celui dont je publiais les travaux, en ayant égard à leur seul mérite. Hélas ! beaucoup de ceux qui s'occupaient des mêmes questions que Jean DOLBIA, HERMITE, HALPHEN, RAFFY, ne seront plus là pour les étudier de nouveau et les relire. Je suis convaincu d'avance qu'ils trouveront de nouveaux lecteurs, aussi bien dans le pays d'HERMITE et d'HALPHEN que dans celui de TCHEBYCHEFF et de ZOLOTAREFF. Ce que je puis affirmer, c'est que, dans notre pays, déjà au moment de leur publication, ils faisaient grand honneur à leur auteur et à leur pays d'origine.

10 octobre 1913.

NOTICE SUR LA VIE
ET LES
TRAVAUX SCIENTIFIQUES
DE
JEAN DOLBNIA

PAR
NICOLAS KRYLOFF

Le 2 février 1912, après une longue et cruelle maladie, suivie d'une intervention chirurgicale mal réussie, s'éteignit à Saint-Petersbourg, le mathématicien russe Jean Dolbnia.

Depuis 15 ans, le savant défunt occupait la chaire d'analyse à l'École supérieure des Mines de l'Impératrice Catherine II, et remplissait ses fonctions de professeur avec un éclat et un art incomparables, dont se souviendront toujours ses anciens auditeurs.

Réuni dans une séance plénière, sous la présidence de M. le professeur Schroöder, le Conseil des professeurs de l'École a voté la publication des œuvres scientifiques de J. Dolbnia, qui paraissent aujourd'hui, précédées d'une préface écrite par l'illustre géomètre français, dont la haute science a été toujours tout particulièrement admirée par le professeur décédé.

Dans ce qui va suivre, nous nous proposons d'esquisser à grands traits, la biographie de notre maître regretté, laquelle pourrait se faire en peu de mots, étant donné que sa vie laborieuse était simple et dépourvue, comme il arrive fréquemment chez les savants, de circonstances extérieures exceptionnelles ; à juste titre, on se rappellerait à ce propos les paroles

tant de fois dites et si souvent répétées : « les seuls réels événements de sa vie étaient les découvertes ».

Jean Dolbnia mourut à l'âge de 59 ans; on connaît très peu de son enfance; ainsi, dans le numéro spécial des Annales de l'École, consacré à sa mémoire, on ne trouve rien à ce sujet; fils d'un simple soldat du temps ⁽¹⁾ de l'Empereur Nicolas I, il a connu évidemment dans sa plus tendre jeunesse les misères et les peines de la vie; remarquablement doué, il a su se faire distinguer au milieu de ses condisciples d'autrefois, et, dès l'âge de 14 ans, il a passé son examen de sortie au lycée ⁽²⁾ de la ville de Pinsk.

Pendant les deux années suivantes, il aidait son père à gagner durement sa vie; ce n'est qu'en 1870, à peine âgé de 17 ans, qu'il subit les épreuves du concours et entra le premier à l'École des Mines, en obtenant de la sorte une bourse d'étudiant, la seule du reste qui à cette époque-là était destinée aux élèves de la première année.

Pendant son séjour à l'École il commençait déjà à éprouver un véritable penchant pour l'étude des sciences exactes et suivait avec beaucoup d'intérêt les leçons de mathématiques et de mécanique analytique du professeur G. Thiemé, comme il l'a lui-même raconté dans ses conversations privées.

Sorti de l'École après cinq années obligatoires, à l'âge de 21 ans, Jean Dolbnia n'aborda point la carrière d'ingénieur des mines, qui pourtant aurait dû présenter pour lui beaucoup d'attraits au point de vue pécuniaire et du bien-être matériel.

Cédant à sa vocation, déjà nettement dessinée, il suivit les cours à l'École Pédagogique Supérieure, et deux ans plus tard, après de brillants examens définitifs, entra comme professeur de mathématiques dans l'enseignement secondaire, tout d'abord, jusqu'en 1880 au gymnase militaire de la ville d'Orenbourg,

⁽¹⁾ A cette époque-là le service militaire du récruté durait 25 ans.

⁽²⁾ C'est-à-dire gymnase classique.

et ensuite à celui de Nijni-Nowgorod jusqu'en 1897, année où, après avoir passé une thèse remarquable intitulée : « Recherches sur la théorie des intégrales abéliennes », il reçut le titre de professeur à l'École Supérieure des Mines.

C'est au commencement de sa carrière pédagogique, qu'apparaissent ses premiers travaux personnels, publiés dans divers recueils français, car le savant défunt avait une estime toute particulière, une vénération même, pour les génies de la science française et appréciait beaucoup la clarté d'exposition des savants français, l'élégance de leur style.

Mais avant de nous étendre plus longuement sur les travaux de notre regretté maître, le moment est venu de dire que, pendant son enseignement aux écoles secondaires, il remplissait ses modestes devoirs avec une maîtrise et un art vraiment peu ordinaires.

« Le maître pendant la leçon, c'est le maréchal sur le champ de bataille » — tel était un de ces aphorismes qu'il aimait à répéter, et en effet il savait guider ses élèves d'une main sûre et exercée; à son talent pédagogique, il réunissait l'expérience des longues années et des mûres réflexions, et obtenait des résultats surprenants : « il réussissait », disait un de ses collègues d'autrefois, « à faire travailler les plus paresseux et cela, chose singulière, bien volontairement, sans punitions » ; ce fait étonnant s'explique pourtant, car les élèves avaient devant eux un professeur, aimant ardemment sa science, et qui leur élucidait à merveille les passages difficiles; Dolbnia s'intéressait lui-même au progrès de ses élèves au commencement de leurs études scientifiques — et on sait combien ce commencement est difficile, ou en tout cas difficilement saisissable pour la plupart des débutants. Maître distingué, il possédait, à un haut degré, l'art délicat et difficile de discerner dans l'enseignement les choses les plus utiles des questions d'importance secondaire, et éveillait la curiosité des élèves, sachant fort bien par expérience, que parfois l'étonnement, dans une certaine mesure, est la source même de la science ; il tenait

surtout, d'après son propre témoignage, à ne pas rebuter ses élèves par ces difficultés de généralisation exagérée, qui sont si mal à propos au début de l'étude.

Ces qualités précieuses et rares se manifestèrent plus tard sur un terrain plus vaste dans son enseignement du cours d'analyse à l'Ecole Supérieure des Mines, dont, ce nous semble, tous ses anciens élèves garderont un souvenir ineffaçable.

Le secret de son succès, et il était incontestable, tenait aussi dans une large mesure à ce travail personnel et assidu, auquel il se livrait pour la préparation de ses leçons : « devant le tableau », disait-il, « la craie à la main, il est trop tard pour réfléchir, quand il s'agit d'un cours qui sera ensuite le sujet d'examens obligatoires pour tous les auditeurs ; tout le travail préparatoire doit être fait d'avance, car les hésitations du professeur se reflètent sur la faculté d'assimilation de ses élèves ».

Ce travail préalable, dont on se dispense quelquefois, et bien à tort d'après notre opinion, imprima à ses leçons cet aspect de simplicité et d'élégance, qui est si rare, mais pourtant si désirable, dans l'enseignement des sciences exactes — les sciences mathématiques, par excellence.

« Une leçon n'est jamais assez bien faite » — c'était encore un de ses aphorismes favoris ; or il est inutile de dire que les étudiants savaient apprécier la sévérité de cette sentence, en fréquentant assidument son auditoire qui était alors presque toujours plein ; et ceci ne paraîtra pas sans valeur à notre temps, où « l'auditeur est devenu prudent », suivant l'expression ironique du défunt. Appelé à faire le cours d'analyse dans une Ecole supérieure, mais technique avant tout, il comprenait nettement les difficultés, toutes particulières, qui découlaient de son devoir — professer pour les futurs ingénieurs.

Tout le monde n'est pas d'accord, comme il est bien connu, dans la discussion des questions, si complexes par la nature des choses, se rapportant à l'enseignement de l'analyse pour les techniciens : donc quelque position qu'on puisse prendre à cet égard, on ne se trouve jamais à l'abri des reproches des

autres ; un fait cependant est certain : il est essentiel pour les commençants d'exposer clairement les fondements de la science, tâche difficile et délicate, quand il s'agit, et c'est le cas ⁽¹⁾, d'idées absolument nouvelles pour la plupart des étudiants.

Dolbnia, de l'avis unanime de tous ceux qui ont eu le bonheur de suivre ses leçons, possédait l'art d'exposition et même d'exposition lumineuse ; doué de plus d'une parole extrêmement facile, sobre et élégante — don si précieux pour un professeur — il ne se contentait point d'être utile seulement à la majorité de ses élèves, en leur facilitant par la clarté de son enseignement l'étude de la science, et par suite, la préparation des examens ; il visait bien plus loin, en s'adressant à la partie d'élite de son auditoire, aux étudiants qui s'intéressaient à la science pure, et c'est pour ces derniers qu'il se permettait souvent, pendant les leçons, ces excursions, si intéressantes et si instructives, dans les contrées plus élevées de l'analyse ; ainsi, les auditeurs de l'année scolaire 1899-1900 se souviendront toujours, nous en sommes persuadé, de ces digressions dans la théorie des intégrales pseudo-elliptiques, c'est-à-dire dans la théorie à laquelle se rapportaient les meilleurs travaux personnels de leur professeur.

Dans cette brève exposition de sa manière d'envisager les questions d'enseignement, on ne peut pas passer sous silence, ses protestations énergiques, dont nous étions le témoin, contre la réduction, à tout prix, du cours déjà réduit au minimum possible : « je vois », disait à ce propos Dolbnia à la délégation des étudiants, sollicitant la diminution du programme, « que vous voulez faire l'enseignement supérieur accessible à tout le monde — but magnifique et combien démocratique ! Mais par quels moyens croyez-vous y parvenir ? Ce n'est pas par l'amélioration des méthodes d'enseignement, ni par d'autres moyens acceptables, mais uniquement par l'abaissement de la science au

(¹) Pour la plus grande partie des lycées russes (gymnases classiques).

niveau de la compréhension d'une intelligence médiocre et paresseuse ».

Ce don des réponses tranchantes et claires, cette capacité d'élucider en peu de mots une question quelquefois assez complexe, étaient indissolublement liés à son talent oratoire, nettement développé, qui lui a rendu un si grand service, surtout vers la fin de sa carrière, pendant l'exercice de ses fonctions difficiles et parfois même si délicates, de directeur de l'École des Mines, poste qu'il occupait avec honneur les deux dernières années de sa vie ; les séances du Conseil de l'École étaient courtes sous sa présidence et productives en même temps.

Son talent oratoire incontestable fut de la plus grande utilité et rendit de réels services dans l'affaire de l'apaisement des étudiants pendant les années tumultueuses de 1898-1905 ; si quelquefois ses adversaires, et il s'en trouve toujours, avaient quelque chose à lui reprocher — on ne peut et on ne doit pas du reste contenter tout le monde — néanmoins, il était toujours sincère et savait à l'appui de son opinion sacrifier même sa position, comme il l'a bien prouvé, en donnant sa démission en 1906. Deux ans après il était de nouveau sollicité par le Conseil et occupa la chaire d'analyse à l'École jusqu'à sa mort.

A ceux qui ont à lire et à étudier les travaux mathématiques de Dolbnia, à ceux qui ont eu le bonheur de suivre ses leçons, ses opinions politiques sont, à notre avis, bien indifférentes ; d'autant plus que, comme il arrive toujours dans ce genre de questions, elles sont sujettes aux critiques les plus contradictoires. Aussi nous ne les discuterons point, en ajoutant seulement qu'à l'avis presque unanime, même de ses adversaires, il était sincère et bon.

Cette bonté était même peut être, il faut le dire, la source d'une certaine faiblesse de caractère : ainsi il savait rarement refuser à ceux, toujours nombreux, qui sollicitaient sa bienveillance, qui avaient recours à son amabilité, à sa bonté ; « jamais, je n'ai opprimé personne », nous a-t-il dit un jour, et c'était la pure vérité.

Le jour de sa mort, près de sa tombe, on a pu constater, que le professeur décédé avait su gagner l'attachement des personnes qui l'entouraient, qui appréciaient son enseignement, et celles-ci étaient nombreuses, car Dolbnia avait professé encore pendant toute une période de sa vie à l'Université des femmes (Cours Supérieurs du professeur Lesgaft); à ce propos, remarquons, en passant, qu'en principe il était, chose curieuse à constater, l'adversaire de l'enseignement supérieur pour les femmes; il basait son opinion sur les résultats d'ordre statistique, en disant : « ce genre d'universités existe depuis plus d'un quart de siècle, quels en sont les résultats... » ; néanmoins, il mettait le même zèle dans l'exercice de ses devoirs de professeur et faisait ses leçons avec un entrain qui lui acquit l'estime unanime de ses auditrices.

A cause de circonstances extérieures qu'il est inutile de rappeler ici, Dolbnia n'a obtenu la chaire d'analyse à l'École des Mines, que vers sa 45^{me} année, âge avancé où il a reçu enfin la possibilité de s'adonner plus à son aise aux recherches mathématiques; pendant toute la période antérieure de sa vie, c'est-à-dire pendant son enseignement aux écoles secondaires, notre maître regretté avait presque 36 leçons par semaine — chiffre énorme, qui ne pouvait pas, hélas, être diminué, car de son modeste traitement, Dolbnia aidait à élever les enfants de son frère; en présence d'une vie si dure, il est impossible de ne pas admirer l'énergie et la force de volonté d'un professeur, qui trouvait tout de même l'occasion de travailler personnellement aux recherches les plus abstraites; ces circonstances si peu favorables devaient cependant laisser des traces dans sa vie : lui-même, à maintes reprises, a eu l'occasion de constater que ses facultés mathématiques se développèrent assez tard; ainsi le mémoire « Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel », publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et par lequel Dolbnia a réellement débuté dans la carrière de la science, date de 1890; ce travail contient la démonstration des critères présentant la condition suffisante, pour

que certaines intégrales du type elliptique s'expriment par les logarithmes ; l'auteur reprend dans ce mémoire le problème autrefois posé par Tchebycheff, et résolu à l'aide des anciennes fonctions elliptiques par Zolotareff ; or l'emploi de la nouvelle fonction $p(u)$ de Weierstrass permet à Dolbnia, par une analyse d'une extrême élégance, d'aboutir à ces séries dont la périodicité, si elle existe, résout la question posée.

Cette idée, inspirée probablement tout d'abord par l'étude approfondie du célèbre ouvrage d'Halphen, d'utiliser dans diverses directions les fonctions nouvelles introduites dans la science par le génie du savant allemand, a guidé Dolbnia dans bien d'autres travaux qui, à partir de 1890, paraissent régulièrement dans les meilleurs recueils mathématiques français, entre autres et surtout dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux.

Ces travaux, éparpillés dans divers journaux et concernant quelquefois des sujets si particuliers en apparence, pris ensemble, constituent un entier très cohérent, car on voit l'idée unique qui guidait leur auteur : c'est justement d'aborder l'étude, la plus complète possible, des divers cas de réduction des intégrales abéliennes et en particulier des intégrales elliptiques ; or, avant d'élaborer une théorie, il fallait multiplier les exemples particuliers d'intégrales réductibles, et ceci était d'autant plus précieux que, dans ce genre de questions, comme il est bien connu, un bon exemple vaut quelquefois la théorie : il suffit en effet de se rappeler, pour s'en convaincre, que les divers exemples ont été donnés par des savants tels que Hermite, E. Picard, Goursat, Raffy, etc., pour ne citer que les auteurs récents. Cela seul donne une idée suffisante des difficultés inhérentes au problème et vraiment, disons-le, il fallait avoir beaucoup d'audace, pleinement justifiée d'ailleurs, pour aborder au commencement de sa carrière scientifique, un problème d'une telle envergure et le poursuivre depuis, avec succès, dans les diverses directions.

Toute une série de mémoires, surtout dans le *Bulletin des*

Sciences mathématiques, contient une multitude de cas, examinés par Dolbnia, qui, patiemment et en vrai savant « ramassait les faits analytiques » importants, selon l'expression d'Hermite ; nous n'entrerons pas ici dans les détails, d'autant plus que la question de la valeur scientifique des mémoires de Dolbnia est traitée dans la préface de cet ouvrage, par un Maître de la Science d'une compétence universellement reconnue.

Bornons-nous seulement à dire que la question de réduction des intégrales et leurs expressions par des fonctions élémentaires, logarithme par exemple, se trouve à la frontière de la science moderne et des méthodes anciennes, en ce sens que, rencontré par les fondateurs de l'analyse, tels qu'Euler, au cours de leurs recherches, ce problème de réduction utilise parfois pour sa résolution la méthode dite transcendante, dont s'est souvent servi Dolbnia dans ses travaux ; cette méthode a recours à la théorie des fonctions nouvellement introduites dans l'analyse par la voie qu'ouvrirent Abel et Jacobi par leur mémorable idée d'inversion.

Etant du plus haut intérêt à tout point de vue, ce problème de réduction sera, sans nul doute, repris un jour de nouveau, et la théorie de réduction sus-dite sera constituée d'une manière plus ou moins définitive ; nous croyons, d'accord avec M. le professeur Vassilieff ⁽¹⁾, que c'est alors, pour les chercheurs futurs, que les travaux remarquables de Dolbnia seront de toute utilité.

Outre ses nombreux mémoires publiés en français et qui se trouvent reproduits dans la présente édition, Dolbnia a fait paraître dans divers recueils russes ⁽²⁾ un grand nombre de travaux, dont la liste se trouve à la fin de cette notice ; certains

⁽¹⁾ En qualité d'ancien président de la Société physico-mathématique de Kasan, M. le Professeur Vassilieff a bien voulu prendre la parole à la séance solennelle du Conseil de l'Ecole, dédiée à la mémoire de Dolbnia, qui collabora jadis au journal de la dite Société.

⁽²⁾ *Les Annales de la Société math. de Kasan. Les Annales de l'Ecole des Mines. Sbornik mathém. de Moscou etc.*

d'entre eux se rapportent à diverses questions d'ordre pédagogique ; les autres contiennent des démonstrations nouvelles de théorèmes connus et enfin plusieurs renferment des recherches inachevées ; parmi ces derniers, se remarque surtout un travail intéressant concernant l'équation du 6^{me} degré, car le savant défunt poursuivait avec beaucoup d'ardeur et de succès les recherches algébriques de la résolution des équations, comme le prouvent bien certains articles de l'édition présente.

Même en exposant les questions les plus élémentaires, notre regretté professeur, trouvait souvent l'occasion de réflexions et d'observations personnelles ; ainsi, pour ne citer qu'un exemple, nous n'avons qu'à rappeler à ceux qui ont suivi ses leçons, la méthode, par lui nommée des *paramètres arbitraires*, qui contient des remarques fort ingénieuses concernant l'application du théorème connu du changement de variables dans les intégrales multiples pour l'évaluation des aires et des volumes.

Dans cette édition, n'ont pas trouvé place non plus une quantité de travaux du défunt se rapportant à la mathématique élémentaire. En résumé, le volume que le Conseil de l'École Supérieure des Mines présente aujourd'hui à l'attention du public mathématique est loin d'être l'édition complète des œuvres de Dolbnia ; mais on a cru agir ainsi conformément aux vœux du savant défunt, qui appréciait tant les paroles si spirituelles de Poincaré : « un écrit s'adresse aux honnêtes gens de l'avenir ; ils ont le temps d'attendre ».

Kolganowka, 16 juin 1913.

LISTE DES MÉMOIRES DE JEAN DOLBNA

publiés en langue russe
et qui ne sont pas contenus dans la présente édition

1. Sur l'intégration à l'aide des fonctions elliptiques. (*Bulletin de la Société mathématique de Kasan*, t. I, 1891).
2. Sur un nouveau cas d'exprimabilité des intégrales par les logarithmes. (*Recueil (Sbornik) mathématique de Moscou*, t. XVIII, 1896).
3. Recherches sur la théorie des intégrales abéliennes. (Thèse, 1896).
4. Comparaison des surfaces d'une sphère, d'un ellipsoïde, d'un hyperboloïde et d'un paraboloides de révolution, donnés par certaines conditions. (*Bulletin du Laboratoire biologique de St-Petersbourg*, 1897).
5. Généralisation d'un problème de Bertrand. (*Ibidem*, 1898).
6. Sur la détermination des limites d'intégration dans les intégrales multiples. (*Ibidem*, 1898).
7. Sur la troisième courbure des courbes gauches. (*Ibidem*, 1898).
8. Sur l'inversion des intégrales abéliennes de genre un. (*Procès-verbaux du congrès des naturalistes russes*, t. X, 1898).
9. Etude directe des équations différentielles hypergéométriques auxquelles satisfont les périodes ω et η des intégrales elliptiques. (Ce mémoire est publié en français dans le *Bulletin du Laboratoire biologique de St-Petersbourg*, 1899).
10. Sur les équations algébriques possédant un groupe linéaire fractionnaire. (*Ibidem*, 1901).
11. Sur la détermination des aires des surfaces et des volumes au moyen de l'introduction de paramètres arbitraires. (*Ibidem*, 1901).
12. Sur quelques propriétés particulières des intégrales abéliennes de genre un. (*Ibidem*, 1901).
13. Sur une application géométrique des intégrales pseudo-elliptiques. (*Travaux de la Section de Physique de la Société impériale des Amis des sciences naturelles de Moscou*, t. IX, 1901).
14. Sur un cas de réduction des intégrales abéliennes de genre $p > 2$. (*Ibidem*, t. X, 1901).

15. Sur une application géométrique des intégrales pseudo-elliptiques. (*Ibidem*, 1902).

16. Sur la détermination des directions principales dans le corps solide. (*Bulletin du Laboratoire biologique de St-Petersbourg*, 1902).

17. Sur une méthode élémentaire de calcul des intégrales pseudo-elliptiques. (*Ibidem*, 1903).

18. Remarque sur la forme du reste dans la série de Taylor. (*Annales de l'Ecole Supérieure des Mines*, t. I, 1908).

19. Sur une transformation des intégrales elliptiques. (*Ibidem*, t. I, 1908).

20. Nouvelle démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. (*Ibidem*, t. I, 1908).

21. Sur une classe d'intégrales hyperelliptiques réductibles. (*Ibidem*, t. I, 1908).

22. Sur une application de la théorie de l'élimination à l'étude des intégrales abéliennes. (*Ibidem*, t. II, 1909).

23. Théorèmes se rapportant aux équations de Monge et d'Ampère. (*Ibidem*, t. III, 1911).

24. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (*Mémoire posthume*, *Ibidem*, t. IV, 1912).

25. Nombreux travaux sur les questions de l'enseignement et dans le domaine des mathématiques élémentaires, insérés dans divers recueils pédagogiques russes.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES DE J. DOLBIA

SUR LE CRITERE DE GALOIS CONCERNANT LA RÉSOLUBILITÉ DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES PAR RADICAUX

(*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. VII, 1888, pp. 467-485)

1. Il est bien connu que les racines de l'équation cubique

$$x^3 + px + q = 0$$

s'expriment par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x_0 = R_1^{\frac{1}{3}} + R_2^{\frac{1}{3}}, \\ x_1 = \alpha R_1^{\frac{1}{3}} + \alpha^2 R_2^{\frac{1}{3}}, \\ x_2 = \alpha^2 R_1^{\frac{1}{3}} + \alpha R_2^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

où R_1, R_2 sont les racines de l'équation

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Abel, le premier, a remarqué ⁽¹⁾ que les racines de chaque équation algébrique irréductible, résoluble par radicaux, sont exprimables par des formules semblables à (1). Dans un des Mémoires posthumes *Sur la résolution algébrique des équations*, Abel a donné ⁽²⁾, sans démonstration, le théorème suivant :

⁽¹⁾ *Œuvres complètes*, 2^e éd., t. II, p. 222 ; 1881.

⁽²⁾ *Œuvres complètes*, 2^e éd., t. II, p. 217-243.

α^k , on obtient

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^k R_i^{\frac{1}{n}} = \alpha^k x_0 + \alpha^{k-1} x_1 + \alpha^{k-2} x_2 + \dots \\ + x_k + \alpha^{n-1} x_{k+1} + \dots + \alpha^{k+1} x_{n-1} + \dots \end{array} \right.$$

En comparant (4) et (5), on trouve

$$S_k \left(R_i^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha^k R_i^{\frac{1}{n}} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

3. *Corollaire.* — En désignant $\left(\frac{z+1}{z} \right) = S$, nous avons

$$S \left(R_i^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha R_i^{\frac{1}{n}},$$

$$S^2 \left(R_i^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha^2 R_i^{\frac{1}{n}},$$

.....

$$S^{n-1} \left(R_i^{\frac{1}{n}} \right) = \alpha^{n-1} R_i^{\frac{1}{n}};$$

d'où il suit que, si nous appliquons les divers degrés de substitution circulaire $S = \left(\frac{z+1}{z} \right)$ à $R_i^{\frac{1}{n}}$, nous aurons la série

$$(6) \quad R_i^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha R_i^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^2 R_i^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad \alpha^{n-1} R_i^{\frac{1}{n}}, \quad \dots$$

En général, les divers degrés de substitution $S = \left(\frac{z+1}{z} \right)$ donnent à $R_i^{\frac{1}{n}}$ la série des valeurs suivantes :

$$R_i^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^i R_i^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^{2i} R_i^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad \alpha^{n-i} R_i^{\frac{1}{n}}.$$

4. *THÉORÈME II.* — Si nous appliquons la substitution $T = \left(\frac{kz}{z} \right)$ à $R_i^{\frac{1}{n}}$, nous aurons

$$T \left(R_i^{\frac{1}{n}} \right) = R_i^{\frac{1}{n}},$$

où i satisfait à la congruence

$$ki \equiv 1 \pmod{n}.$$

Démonstration. — En appliquant la substitution $T = \begin{pmatrix} kz \\ z \end{pmatrix}$ à la fonction

$$R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}} = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha^{n-i}x_i + \dots + \alpha x_{n-1},$$

nous aurons

$$T\left(R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}\right) = x_0 + \alpha^{n-1}x_k + \alpha^{n-2}x_{2k} + \dots + \alpha^{n-i}x_{ki} + \dots + \alpha x_{n-k}.$$

Soit

$$ki \equiv 1 \pmod{n};$$

alors

$$2ki \equiv 2, \quad 3ki \equiv 3, \quad \dots$$

Par conséquent,

$$(7) \quad T\left(R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}\right) = x_0 + \alpha^{n-i}x_1 + \alpha^{n-2i}x_2 + \dots + \alpha x_{n-1}.$$

Mais, de l'équation (2), on déduit

$$(8) \quad R_{\frac{1}{i}}^{\frac{1}{n}} = x_0 + \alpha^{n-i}x_1 + \alpha^{n-2i}x_2 + \dots + \alpha^i x_{n-1}.$$

En comparant (7) et (8), on obtient

$$T\left(R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}\right) = R_{\frac{1}{i}}^{\frac{1}{n}} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

5. *Corollaire.* — Soit ρ la racine primitive du nombre premier n ; alors $\rho^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, tous les autres degrés de ρ sont congrus avec les nombres 2, 3, 4, ..., $n-1$. Posons

$$\rho^{n-2} \equiv a, \quad \rho^{n-3} \equiv b, \quad \dots, \quad \rho^2 \equiv k \pmod{n},$$

où $a, b, c, \dots, k$ sont les divers termes de la suite 2, 3, ..., $\rho-1$, $\rho+1, \dots, n-1$. Posons $T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$. En appliquant successivement tous les degrés de T , nous aurons

$$\begin{aligned} T\left(R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}\right) &= R_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{n}}, \\ T^2\left(R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}\right) &= R_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{n}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ T^{n-2}\left(R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}\right) &= R_{\frac{1}{\rho}}^{\frac{1}{n}}, \\ T^{n-1}\left(R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}\right) &= R_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

où les indices $a, b, c, \dots, k$ sont les résidus minimum de

$$\rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-2},$$

suivant le module n .

De cette manière, nous verrons que les différents degrés de substitution T donnent la série

$$\begin{aligned} T\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) &= R_{ai}^{\frac{1}{n}}, \\ T^2\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) &= R_{bi}^{\frac{1}{n}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ T^{n-2}\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) &= R_{\rho i}^{\frac{1}{n}}, \\ T^{n-1}\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) &= R_i^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

6. A l'aide des deux substitutions $S = \begin{pmatrix} z & + & 1 \\ & z \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \rho z \\ & z \end{pmatrix}$, nous formerons la Table suivante :

$$(9) \quad \begin{cases} 1, & S, & S^2, & \dots, & S^{n-1}, \\ T, & ST, & S^2T, & \dots, & S^{n-1}T, \\ T^2, & ST^2, & S^2T^2, & \dots, & S^{n-1}T^2, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ T^{n-2}, & ST^{n-2}, & S^2T^{n-2}, & \dots, & S^{n-1}T^{n-2}. \end{cases}$$

La table (9) constitue un système conjugué⁽¹⁾. Les substitutions de ce système, étant appliquées successivement à $R_i^{\frac{1}{n}}$, donnent à cette fonction les $n(n-1)$ valeurs suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} R_i^{\frac{1}{n}}, & \alpha R_i^{\frac{1}{n}}, & \alpha^2 R_i^{\frac{1}{n}}, & \dots, & \alpha^{n-1} R_i^{\frac{1}{n}}, \\ R_a^{\frac{1}{n}}, & \alpha^a R_a^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{2a} R_a^{\frac{1}{n}}, & \dots, & \alpha^{n-a} R_a^{\frac{1}{n}}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ R_\rho^{\frac{1}{n}}, & \alpha^\rho R_\rho^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{2\rho} R_\rho^{\frac{1}{n}}, & \dots, & \alpha^{n-\rho} R_\rho^{\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

(1) SERRET. *Cours d'algèbre supérieure*, t. II, p. 268-271 ; 1886.

7. THÉORÈME III. — Les substitutions qui n'altèrent pas la fonction R_I^n constituent un système conjugué dont l'ordre est

$$M = 1, 2, 3, \dots, (n - 2);$$

ce système se compose de toutes les substitutions qui n'altèrent pas les deux racines : x_0 et encore une certaine racine x_k .

Démonstration. — En appliquant à R_I^n tous les degrés de substitution $T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$, nous aurons les $(n - 1)$ valeurs différentes de cette fonction qui sont renfermées dans la série

$$(10) \quad R_I^n, \quad R_2^n, \quad R_3^n, \quad \dots, \quad R_{n-1}^n, \quad \dots$$

Les substitutions $I, T, T^2, \dots, T^{n-2}$ n'altèrent pas l'indice $z = 0$. D'autre part, si à l'équation

$$x_0 = R_I^n + R_2^n + \dots + R_{n-1}^n$$

nous appliquons toutes les substitutions possibles de racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, la racine x_0 n'est pas altérée par cette opération. D'où il suit que toutes les substitutions de racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ donnent à R_I^n les $(n - 1)$ valeurs différentes. Le nombre des substitutions des racines de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ est exprimable par le produit $N = 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$. Ces substitutions forment un système conjugué qu'on peut former de la manière suivante. Du nombre général n des racines de l'équation proposée nous excluons x_0 , et encore une racine à volonté, par exemple x_1 ; de toutes les autres $(n - 2)$ racines,

$$(11) \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots, \quad x_{n-1}$$

nous formons tous les arrangements possibles semblables à (11). Le nombre de tels arrangements est égal au produit

$$M = 1, 2, 3, \dots, (n - 2).$$

Nommons les substitutions à l'aide desquelles nous recevons tous les M arrangements par

$$(12) \quad I, U_1, U_2, \dots, U_{M-1}.$$

Les substitutions (12) constituent un système conjugué qui n'altère pas les deux indices 0 et 1. Des deux systèmes conjugués $(1, T, T^2, \dots, T^{n-2})$ et (12), formons la Table

$$(13) \quad \begin{cases} 1, & T, & T^2, & \dots, & T^{n-2}, \\ U_1, & U_1 T, & U_1 T^2, & \dots, & U_1 T^{n-2}, \\ U_2, & U_2 T, & U_2 T^2, & \dots, & U_2 T^{n-2}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ U_{M-1}, & U_{M-1} T, & U_{M-1} T^2, & \dots, & U_{M-1} T^{n-2} \end{cases}$$

Ce tableau renferme les $(n - 1)M$ substitutions parmi lesquelles ne peuvent être deux substitutions égales, car l'équation

$$U_\alpha T^\beta = U_{\alpha'} T^{\beta'}$$

entraîne l'égalité

$$(14) \quad T^{(\beta - \beta')} = U_\alpha^{-1} U_{\alpha'},$$

ce qui ne peut être, parce que le produit $U_\alpha^{-1} U_{\alpha'}$ transforme au plus les $(n - 2)$ indices, alors que la substitution $T^{(\beta - \beta')}$ transforme tous les indices, excepté les zéros. D'où il suit que la Table (13) renferme

$$[1, 2, 3, \dots, (n - 1)]$$

substitutions diverses qui ne transforment pas x_0 et qui constituent un groupe dont l'ordre est

$$N = 1, 2, 3, \dots, (n - 1).$$

Il est facile de prouver que, dans chaque ligne horizontale du Tableau (13), il y a seulement une substitution qui n'altère pas R_1^n . En effet, admettons que dans la ligne

$$\begin{array}{ccccccc} U_\alpha, & U_\alpha T, & U_\alpha T^2, & \dots, & & & \\ U_\alpha T^k, & \dots, & U_\alpha T^l, & \dots, & U_\alpha T^{n-2} & & \end{array}$$

il y ait deux substitutions $U_\alpha T^k$ et $U_\alpha T^l$ qui n'altèrent pas R_1^n . Dans cette hypothèse, la substitution

$$(U_\alpha T^l)^{-1} = T^{-l} U_\alpha^{-1}$$

n'altère pas R_1^n ; par conséquent, le produit

$$T^{-l} U_\alpha^{-1}, \quad U_\alpha T^k = T^{k-l}$$

n'altère pas non plus $R_1^{\frac{1}{n}}$, ce qui ne peut être. De là suit qu'il existe

$$M = 1, 2, 3, \dots, (n - 2)$$

diverses substitutions qui n'altèrent pas $R_1^{\frac{1}{n}}$. Ces substitutions ont les formes

$$U_\alpha T^\beta,$$

où

$$\alpha \leq M - 1, \quad \beta \leq n - 2,$$

et évidemment constituent un système conjugué ⁽¹⁾.

D'après les théorèmes bien connus de MM. Bertrand et Serret ⁽²⁾, nous connaissons que, si l'ordre de système conjugué de $(n - 1)$ lettres est égal au produit $1, 2, 3, \dots, (n - 2)$, le système se compose des substitutions formées avec $(n - 2)$ lettres; d'où il suit

que le système conjugué qui n'altère pas $R_1^{\frac{1}{n}}$ se compose de toutes les substitutions qui n'altèrent pas x_0 et encore l'une des lettres $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

C. Q. F. D.

8. Remarque nécessaire. — Les théorèmes de MM. Bertrand et Serret dont nous nous sommes servis admettent une exception quand $n = 7$. Dans ce cas, $n - 1 = 6$, et alors, outre le système qui renferme toutes les substitutions de cinq lettres, on peut encore former un système de même ordre qui contient les substitutions circulaires des ordres 4, 5, 6. Il est bien compréhensible que ce dernier groupe ne peut satisfaire aux conditions du théorème III. En effet, le groupe d'ordre 120, qui fait exception aux théorèmes de MM. Bertrand et Serret, renferme la substitution circulaire

$$\Phi = (x_1, x_5, x_2, x_3, x_4, x_6) \quad (3).$$

En remarquant que 3 est la racine primitive du nombre premier 7, posons

$$T = \begin{pmatrix} 3z \\ z \end{pmatrix},$$

⁽¹⁾ SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 386; 1886.

⁽²⁾ *Ibid.*, t. II, p. 296.

⁽³⁾ SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 311; 1886.

alors

$$T^2 = \begin{pmatrix} 9z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2, x_4, x_6, x_1, x_3, x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \end{pmatrix},$$

où

$$T^2 = (x_1, x_2, x_4) (x_3, x_6, x_5).$$

Il est clair que

$$\Phi^2 = T^2;$$

par conséquent, le groupe qui renferme les substitutions circulaires des ordres 4, 5, 6 ne peut être identique au groupe du même ordre, dont toutes les substitutions n'altèrent pas $R_1^{\frac{1}{n}}$.

9. Raisonnant comme ci-dessus, nous verrons que le groupe qui n'altère pas $\alpha^p R_k$ se compose des $M = 1, 2, \dots, (n - 2)$ substitutions qui ne transforment pas x_p , et encore une certaine racine x_q .

10. THÉORÈME IV. — *Chaque fonction de la forme $\alpha^k R_l^{\frac{1}{n}}$ est exprimable rationnellement par deux racines de l'équation proposée convenablement choisie.*

Démonstration. — Prenons l'une des fonctions données $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$. Cette fonction n'est pas altérée par toutes les substitutions possibles des racines

$$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_{n-1},$$

excepté x_k et encore une certaine racine x_l ; par conséquent, $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$ est une fonction entière, rationnelle et symétrique des racines de l'équation

$$(15) \quad \begin{cases} (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \dots \\ \times (x - x_{l-1}) (x - x_{l+1}) \dots (x - x_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

Si

$$(16) \quad f(x) = 0$$

est l'équation proposée, la fonction $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$ est exprimable rationnellement par les coefficients de l'équation

$$\frac{f(x)}{(x - x_k) (x - x_l)} = 0,$$

par conséquent, elle s'exprime rationnellement par x_k et x_l .

C. Q. F. D.

11. THÉORÈME V. — *Chaque racine de l'équation proposée s'exprime rationnellement par chacune des fonctions (A) (n° 5), si les racines de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$ sont rationnellement connues.*

Démonstration. — Nous avons reproduit ici les raisonnements avec lesquels Galois a démontré l'un de ses théorèmes fondamentaux ⁽¹⁾. Nous savons que le groupe des substitutions d'ordre $N = 1, 2, \dots, (n - 1)$ qui ne transforment pas x_0 donnent à $R_1^{\frac{1}{n}}$ les $(n - 1)$ valeurs

$$R_1^{\frac{1}{n}}, \quad R_2^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad R_{n-1}^{\frac{1}{n}}.$$

Composons l'équation

$$(17) \quad \left(\zeta - R_1^{\frac{1}{n}} \right) \left(\zeta - R_2^{\frac{1}{n}} \right) \dots \left(\zeta - R_{n-1}^{\frac{1}{n}} \right) = 0.$$

dont les coefficients sont les fonctions symétriques des racines de l'équation

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = 0;$$

par conséquent, on peut donner à l'équation (17) la forme

$$F(\zeta, x_0) = 0.$$

L'équation proposée $f(x) = 0$ a une racine commune avec chacune des équations

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} F\left(R_1^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0, \\ F\left(R_2^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F\left(R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0. \end{array} \right.$$

Il est facile de démontrer qu'aucune des équations (18) n'a d'autre racine commune avec l'équation proposée.

C'est pourquoi nous disons que l'équation

$$(19) \quad F\left(R_k^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0$$

⁽¹⁾ SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 389-395; 1866.

est satisfaite par la substitution x_j au lieu de x , c'est-à-dire que nous avons identiquement

$$(20) \quad F\left(R_k^{\frac{1}{n}}, x_j\right) = 0,$$

L'équation

$$(21) \quad F(\zeta, x_j) = 0$$

découle de (17) par la substitution circulaire $\begin{pmatrix} z + j \\ z \end{pmatrix}$; par conséquent l'équation (21), dans la forme étendue, est

$$\left(\zeta - \alpha^j R_1^{\frac{1}{n}}\right) \left(\zeta - \alpha^{2j} R_2^{\frac{1}{n}}\right) \dots \left(\zeta - \alpha^{n-j} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}\right) = 0.$$

Il est évident qu'à cette dernière équation la racine $\zeta = R_k^{\frac{1}{n}}$ ne satisfait pas; par conséquent, l'égalité (20) n'est pas admissible, par conséquent notre hypothèse est illusoire.

D'où il suit que chaque équation (18) n'a qu'une seule racine commune avec l'équation proposée; par conséquent, le polynôme $f(x)$ a un plus grand commun diviseur avec chacun des polynômes (18), et ce commun diviseur est un polynôme du premier degré en x . Nous chercherons ce diviseur parmi $f(x)$ et $F(\zeta, x)$; ayant obtenu le reste du premier degré en x , nous égalons ce reste à zéro; par cela même, x se transforme en x_0 , lequel s'exprime rationnellement par ζ ; au lieu de ζ , nous pouvons substituer chacune des fonctions

$$R_1^{\frac{1}{n}}, \quad R_2^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad R_{n-1}^{\frac{1}{n}}.$$

De la même manière, nous démontrerions que, en général x_k s'exprime rationnellement par

$$\alpha^k R_1^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^{2k} R_2^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad \alpha^{n-k} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}.$$

D'où il suit que chacune des racines s'exprime rationnellement par chacune des fonctions (A), n° 5. C. Q. F. D.

12. Corollaire. — Il résulte des théorèmes précédents que chacune des fonctions

$$R_1^{\frac{1}{n}}, \quad R_2^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$$

s'exprime rationnellement l'une par l'autre. En effet, chacune de ces fonctions s'exprime rationnellement par les racines

$$x_0, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_{n-1};$$

chaque racine s'exprime rationnellement par l'une quelconque des fonctions (A), n° 5; par conséquent, une fonction quelconque $R_l^{\frac{1}{n}}$ s'exprime rationnellement par $R_k^{\frac{1}{n}}$, où l et k sont des entiers arbitraires.

13. THÉORÈME VI (Galois). — *Si une équation irréductible de degré premier n est résoluble par radicaux, les racines sont toutes exprimables en fonction rationnelle de deux quelconques d'entre elles.*

Démonstration. — Nous avons vu que chaque racine de l'équation proposée s'exprime rationnellement en chacune des fonctions (A), n° 5; chacune de ces fonctions, par exemple $R_1^{\frac{1}{n}}$, s'exprime rationnellement en fonction de deux certaines racines; par conséquent, nous aurons

$$R_1^{\frac{1}{n}} = \Psi(x_k, x_l).$$

En appliquant à cette équation toutes les substitutions de la forme $\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix}$, nous obtenons, pour le premier membre de l'équation, le Tableau suivant :

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} R_1^{\frac{1}{n}}, & R_2^{\frac{1}{n}}, & R_3^{\frac{1}{n}}, & \dots, & R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, \\ \alpha R_1^{\frac{1}{n}}, & \alpha R_2^{\frac{1}{n}}, & \alpha R_3^{\frac{1}{n}}, & \dots, & \alpha R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{n-1} R_2^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{n-1} R_3^{\frac{1}{n}}, & \dots, & \alpha^{n-1} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}. \end{array} \right.$$

D'autre part, toutes les valeurs possibles de Ψ sont renfermées dans la Table

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \Psi(x_0, x_1), & \Psi(x_0, x_2), & \dots, & \Psi(x_0, x_{n-1}), \\ \Psi(x_1, x_0), & \Psi(x_1, x_2), & \dots, & \Psi(x_1, x_{n-1}), \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \Psi(x_{n-1}, x_0), & \Psi(x_{n-1}, x_1), & \dots, & \Psi(x_{n-1}, x_{n-2}). \end{array} \right.$$

Exprimons x_k par x_i et y_j . Cherchons dans la Table (C) la fonction $\Psi(x_i, x_j)$; cette fonction sera égale à un des termes du Tableau (B), soit

$$\Psi(x_i, x_j) = \alpha^m R_{\frac{n}{p}}^{\frac{1}{p}}.$$

Comme x_k s'exprime rationnellement par $\alpha^m R_{\frac{n}{p}}^{\frac{1}{p}}$, la racine x_k s'exprimera rationnellement en $\Psi(x_i, x_j)$ et, par conséquent, en x_i, x_j . C. Q. F. D.

14. THÉORÈME VII. — La fonction

$$R_1 = (x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha x_{n-1})^n$$

est la racine d'une équation abélienne du degré $(n - 1)$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de celles de la proposée.

Détermination. — Les quantités $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ sont les racines de l'équation

$$(22) \quad (\zeta - R_1)(\zeta - R_2) \dots (\zeta - R_{n-1}) = 0.$$

Démontrons, en premier lieu, que les coefficients de cette équation sont *rationnellement connus*. A cet effet, formons toutes les substitutions possibles de n racines $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$; ces substitutions forment un groupe de l'ordre $(1.2.3 \dots n)$. Chaque substitution de ce groupe est équivalente au produit de quelques transpositions; mais la transposition (x_i, x_j) remplace la suite

$$\alpha^i R_{\frac{n}{1}}^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^{2i} R_{\frac{n}{2}}^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad \alpha^{(n-1)i} R_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{1}{n}}$$

par la suite

$$\alpha^j R_{\frac{n}{1}}^{\frac{1}{n}}, \quad \alpha^{2j} R_{\frac{n}{2}}^{\frac{1}{n}}, \quad \dots, \quad \alpha^{(n-1)j} R_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{1}{n}}.$$

Mais

$$\left(\alpha^{ki} R_{\frac{n}{k}}^{\frac{1}{n}} \right)^n = R_k.$$

Alors la transposition (x_i, x_j) remplace dans la série $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ un terme par l'autre; par conséquent, la fonction symétrique des quantités $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{n-1}$ n'est altérée par aucune transposition. D'où il suit que chaque fonction symétrique des $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ sera *rationnellement connue*; par conséquent, les coefficients de l'équation (22) seront rationnellement connus.

par conséquent R_1 s'exprime rationnellement en R_2 . D'où il résulte, comme l'a remarqué, pour la première fois, Kronecker ⁽¹⁾, que l'équation (22) se rapporte à la catégorie des équations *abéliennes* ⁽²⁾.

15. THÉORÈME VIII (Galois). — *Si toutes les racines d'une équation irréductible de degré premier n sont exprimables rationnellement en fonction de deux quelconques d'entre elles, l'équation est résoluble par radicaux.*

Démonstration. — Formons la fonction

$$\Pi_1 = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha x_{n-1},$$

où α est l'une des racines de l'équation $\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0$. Comme toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont exprimables rationnellement par deux racines à volonté, on peut écrire

$$(26) \quad \Pi_1 = \varphi(x_0, x_1),$$

où φ est une fonction rationnelle.

En appliquant à l'équation (26) toutes les substitutions de la forme $\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix}$ (Table IX, n° 6), nous obtenons pour Π_1 la série de valeurs

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \Pi_1, & \alpha \Pi_1, & \alpha^2 \Pi_1, & \dots, & \alpha^{n-1} \Pi_1, \\ \Pi_a, & \alpha^a \Pi_a, & \alpha^{2a} \Pi_a, & \dots, & \alpha^{n-a} \Pi_a, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \Pi_\rho, & \alpha^\rho \Pi_\rho, & \alpha^{2\rho} \Pi_\rho, & \dots, & \alpha^{n-\rho} \Pi_\rho, \end{array} \right.$$

où $a, b, c, \dots, \rho$ ont les valeurs désignées dans le n° 5. A la fonction $\varphi(x_0, x_1)$ répond la série

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \varphi(x_0, x_1), & \varphi(x_1, x_2), & \dots, & \varphi(x_{n-1}, x_n), \\ \varphi(x_0, x_\rho), & \varphi(x_1, x_{\rho+1}), & \dots, & \varphi(x_{n-1}, x_{\rho-1}), \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \varphi(x_0, x_a), & \varphi(x_1, x_{a+1}), & \dots, & \varphi(x_{n-1}, x_{a-1}). \end{array} \right.$$

La Table (E) contient toutes les valeurs de la fonction φ ; par

⁽¹⁾ SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 654-664; 1886.

⁽²⁾ N.-H. ABEL. *Œuvres complètes*, t. I, p. 478 507; 1881.

SUR L'ADDITION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE, DEUXIÈME ET TROISIÈME ESPÈCE

(Nouv. Ann. de math., 3^e série, t. VIII, 1889, pp. 209-213)

1. Le célèbre théorème d'Abel, exposé dans le *Mémoire Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* ⁽¹⁾, se rapporte, comme on le sait, à l'addition de toutes les fonctions transcendentes ayant des différentielles algébriques. A l'aide de ce théorème, comme nous verrons, on obtient, d'une manière très simple, les formules d'addition des arguments de première, deuxième et troisième espèce. Quoique la question qui nous occupe soit à peu près épuisée, néanmoins une façon nouvelle de la poser mérite peut-être quelque attention.

Nous nous proposons, *a priori*, de rechercher les valeurs de x pour lesquelles

$$\Delta x = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}$$

s'exprime par une fonction rationnelle et entière de x ⁽²⁾. Ces valeurs se déterminent par l'équation algébrique

$$(1) \quad \Delta x = a + bx + cx^2 + \dots + lx^m$$

ou

$$(2) \quad (\Delta x)^2 - (a + bx + cx^2 + \dots + lx^m)^2 = 0.$$

dont le degré et les coefficients sont des quantités arbitraires. Si nous désirons que les équations (2) aient p racines arbitraires

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_p, \quad p < m,$$

⁽¹⁾ *Oeuvres complètes*, t. I, p. 518; 1881.

⁽²⁾ L'idée fondamentale développée ici est indiquée dans l'ouvrage de M. Halphen (*Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 30, 58, 215; 1886).

nous prendrons dans la première partie de l'équation p coefficients arbitraires.

Une si grande généralité de l'équation (2) permet de traiter la question de l'addition des arguments elliptiques de différentes manières. Pour le but proposé, il suffit que l'équation (2) ait trois racines, et par conséquent deux coefficients arbitraires. Dans l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, p. 688; 1875), on donne à l'équation fondamentale la forme suivante

$$(\Delta x)^2 - (1 + px + qx^2)^2 = 0.$$

Au moyen de cette forme, on voit de suite que, après la disparition du facteur x , il reste une équation du troisième degré, qui, par conséquent, aura trois racines. On peut disposer arbitrairement de deux de ces racines, car les coefficients p et q sont indéterminés.

Abel ⁽¹⁾, et après lui d'autres auteurs ⁽²⁾, donnent à l'équation (2) la forme

$$(3) \quad (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) - (x\alpha + \beta x^3)^2 = f(x) = 0.$$

Cette équation a six racines

$$\pm x_1, \quad \pm x_2, \quad \pm x_3.$$

Si x_1, x_2, x_3 satisfont à l'équation

$$\Delta x - (x\alpha + \beta x^3) = 0,$$

les racines $(-x_1), (-x_2), (-x_3)$ satisferont à l'équation

$$\Delta x + x\alpha + \beta x^3 = 0.$$

Prenant la différentielle totale de (3), nous aurons

$$f'(x)dx - 2\Delta x(xd\alpha + x^3d\beta) = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2 \frac{x}{f'(x)} d\alpha + 2 \frac{x^3}{f'(x)} d\beta$$

ou

$$\frac{x^2 dx}{\Delta x} = 2 \frac{x^3}{f'(x)} d\alpha + 2 \frac{x^5}{f'(x)} d\beta;$$

⁽¹⁾ *Œuvres complètes*, t. I, p. 538; 1881.

⁽²⁾ J. BERTRAND. *Calcul intégral*, p. 582; 1870.

par conséquent,

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2 dx_i}{\Delta x_i} = 2d\alpha \sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'(x_i)} + 2d\beta \sum_1^3 \frac{x_i^5}{f'(x_i)}.$$

D'après le théorème bien connu d'Euler ⁽¹⁾, nous aurons

$$\sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'(x_i)} = 0.$$

$$\sum_1^3 \frac{x_i^5}{f'(x_i)} = -\frac{1}{2\beta^2},$$

donc

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2 dx_i}{\Delta x_i} = -\frac{d\beta^2}{\beta^2},$$

d'où

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1^2 dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{x_2^2 dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{x_3^2 dx_3}{\Delta x_3} = \frac{1}{\beta} + \text{const.}$$

Dans cette équation, on peut disposer arbitrairement des racines x_1 et x_2 . Supposons $x_1 = x_2 = 0$, il en résulte nécessairement $x_3 = 0$ ⁽²⁾, et comme $\frac{1}{\beta^2} = x_1^2 x_2^2 x_3^2$, si nous avons $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on obtient

$$\frac{1}{\beta} = 0;$$

donc

$$\text{const.} = 0$$

et par conséquent

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1^2 dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{x_2^2 dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{x_3^2 dx_3}{\Delta x_3} = x_1 x_2 x_3.$$

Remarque. — La propriété des racines x_1, x_2, x_3 , pour laquelle, si $x_1 = x_2 = 0$, on a

$$x_3 = 0,$$

peut être démontrée de la manière suivante. Nous avons

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_1^3 - \Delta x_1 &= 0, \\ \alpha x_2 + \beta x_2^3 - \Delta x_2 &= 0, \\ \alpha x_3 + \beta x_3^3 - \Delta x_3 &= 0, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 216, 217; 1886.

⁽²⁾ BERTRAND. *Calcul intégral*, p. 581; 1870.

d'où

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^3 & \Delta x_1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^3 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant $x_1 = 0$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^3 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_2^3 \\ x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2^2 \\ 1 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x_3^2 = x_2^2.$$

Si donc $x_2 = 0$, nous aurons

$$x_3 = 0.$$

2. De l'équation

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2 \frac{x}{f'(x)} dx + 2 \frac{x^3}{f'(x)} d\beta.$$

on déduit

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\Delta x_i} = 2 dx \sum_1^3 \frac{x_i}{f'(x_i)} + 2 d\beta \sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'(x_i)},$$

d'où

$$(5) \quad \int_0^{x_1} \frac{dx_i}{\Delta x_i} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{\Delta x_3} = 0.$$

Posons

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\Delta x} = u_1, \quad \int_0^{x_2} \frac{dx}{\Delta x} = u_2, \quad \int_0^{x_3} \frac{dx}{\Delta x} = u_3;$$

nous avons

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 0, \\ u_3 &= -(u_1 + u_2), \\ x_1 &= \lambda u_1, \quad x_2 = \lambda u_2, \quad x_3 = \lambda u_3. \end{aligned}$$

L'équation (4) nous donnera

$$(6) \quad -\lambda u_1 \lambda u_2 \lambda (u_1 + u_2) = \int_0^{u_1} \lambda^2 u_1 du_1 + \int_0^{u_2} \lambda^2 u_2 du_2 + \int_0^{u_3} \lambda^2 u du.$$

Supposons que u_3 soit une quantité constante, alors

$$du_1 = -du_2.$$

En différentiant (6) relativement à u_1 , nous aurons

$$-\lambda(u_1 + u_2)(\mu u_1 \nu u_1 \lambda u_2 - \mu u_2 \nu u_2 \lambda u_1) = \lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2,$$

d'où

$$\lambda(u_1 + u_2) = \frac{\lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2}{\lambda u_1 \mu u_2 \nu u_2 - \lambda u_2 \mu u_1 \nu u_1},$$

ou

$$(8) \quad \lambda(u_1 + u_2) = \frac{\lambda u_1 \mu u_2 \nu u_2 + \lambda u_2 \mu u_1 \nu u_1}{1 - k^2 \lambda^2 u_1 \lambda^2 u_2}.$$

Nous voyons avec quelle simplicité on obtient la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques proprement dites. L'addition des arguments elliptiques du n° 3, troisième espèce, est obtenue tout aussi simplement, quoique le calcul en soit plus compliqué.

Nous avons évidemment

$$\frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x} = \frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2)f'(x)} dx + \frac{2a^2 x^3}{(a^2 - x^2)f'(x)} d\beta.$$

En décomposant les deux fractions

$$\frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2)f'(x)}, \quad \frac{2a^2 x^3}{(a^2 - x^2)f'(x)}$$

d'après les règles bien connues, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2)f'(x)} &= \frac{a^2}{f'(a)} \left(\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x} \right) + \frac{\varphi(x)}{f'(x)}, \\ \frac{2a^2 x^3}{(a^2 - x^2)f'(x)} &= \frac{a^4}{f'(a)} \left(\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x} \right) + \frac{\xi(x)}{f'(x)}; \end{aligned}$$

ici le degré de $\varphi(x)$ est moindre que le degré de $f'(x)$, et le degré $\xi(x)$ moindre que le degré $f'(x)$.

Par cette raison,

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x} = \left(\frac{a^2}{f'(a)} dx + \frac{a^4}{f'(a)} d\beta \right) \sum_1^3 \left(\frac{1}{a - x_i} + \frac{1}{a + x_i} \right).$$

Mais

$$\sum_1^3 \left(\frac{1}{a - x_i} + \frac{1}{a + x_i} \right) = \frac{f'(a)}{f(a)};$$

par conséquent,

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a^2}{f(a)} dx + \frac{a^4}{f(a)} d\beta.$$

En posant $\alpha a + \beta a^3 = \zeta$, nous avons

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{(\Delta a)^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2\Delta a} \left(\frac{1}{\Delta a + \zeta} + \frac{1}{\Delta a - \zeta} \right)$$

et, par suite,

$$\sum_1^3 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a}{2\Delta a} \log \left(\frac{\Delta a + \alpha a + \beta a^3}{\Delta a - \alpha a - \beta a^3} \right)^2 + C.$$

Si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on obtient

$$\beta = \infty, \quad \alpha = \infty, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \infty,$$

par conséquent $C = 0$; donc

$$\sum_1^3 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a}{2\Delta a} \log \left(\frac{\alpha a + \beta a^3 + \Delta a}{\alpha a + \beta a^3 - \Delta a} \right)^2.$$

4. L'équation d'Abel

$$1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4 - (\alpha x + \beta x^3)^2 = 0$$

se transforme en celle-ci

$$(1) \quad \frac{1}{x^6} - (1 + k^2) \frac{1}{x^4} + \frac{k^2}{x^2} - \left(\frac{\alpha}{x^2} + \beta \right)^2 = 0.$$

En remarquant que $\frac{1}{x^2}$ est la fonction linéaire et entière de la fonction pu (Weierstrass), l'équation (1), relativement à la fonction pu , sera de la forme

$$(2) \quad f(x) = 4p^3u - g_2pu - g_3 - (apu + b)^2 = 0, \\ pu = x.$$

M. Halphen emploie cette équation dans son important ouvrage, que nous avons eu déjà l'occasion de citer. Par un raisonnement très simple, on obtient

$$(3) \quad \begin{aligned} du &= 2 \frac{db}{f'(x)} + 2 \frac{x}{f'(x)} da, \\ u_1 + u_2 + u_3 &= \text{une période.} \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$\sum p u_1 du_1 = 2 \sum \frac{x_1 db}{f'(x_1)} + 2 \sum \frac{x_1^2 da}{f'(x_1)}.$$

Or

$$\sum \frac{x_1}{f'(x_1)} = 0, \quad \sum \frac{x_1^2}{f'(x_1)} = \frac{1}{4};$$

par conséquent,

$$\sum p u_1 du_1 = \frac{d\alpha}{2},$$

$$(4) \quad \sum \int p u_1 du_1 = \frac{a}{2} + \text{const.} = \pm \sqrt{p u_1 + p u_2 + p u_3} + C.$$

Posons $u_3 = \text{const.}$; alors $du_1 = -du_2$.

En différentiant (4) relativement à u_1 , nous aurons

$$(5) \quad p u_1 - p u_2 = \pm \frac{p' u_1 - p' u_2}{2 \sqrt{p u_1 + p u_2 + p u_3}},$$

d'où

$$(A) \quad p u_1 + p u_2 + p u_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{p' u_1 - p' u_2}{p u_1 - p u_2} \right)^2.$$

C'est la première formule fondamentale.

De l'équation (4) on déduit

$$(6) \quad \sum \left[\frac{1}{u_1} + \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - p u \right) du \right] = i \sqrt{p u_1 + p u_2 + p u_3} + C,$$

où $i = \pm 1$.

Posons $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

$$\frac{1}{u} + \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - p u \right) du = \zeta(u);$$

nous aurons

$$\zeta(u_1) + \zeta(u_2) - \zeta(u_1 + u_2) = \frac{i}{2} \frac{p' u_1 - p' u_2}{p u_1 - p u_2} + C,$$

d'où

$$\zeta(u_1) - \zeta(u_2) - \zeta(u_1 - u_2) = \frac{i}{2} \frac{p' u_1 + p' u_2}{p u_1 - p u_2} + C,$$

$$2\zeta(u_1) - [\zeta(u_1 + u_2) + \zeta(u_1 - u_2)] = i \frac{p' u_1}{p u_1 - p u_2} + 2C.$$

Posons $u_1 = \omega$ (une demi-période); alors

$$\zeta(\omega) = \eta, \quad \zeta(\omega + u_2) + \zeta(\omega - u_2) = 2\eta, \quad p' \omega = 0;$$

par conséquent,

$$C = 0,$$

et

$$\zeta(u_1) + \zeta(u_2) - \zeta(u_1 + u_2) = \frac{i}{2} \frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}.$$

En posant ici $\lim (u_1) = 0$, nous voyons que la partie principale du premier membre de cette équation est $\frac{1}{u}$, et celle du second $-\frac{i}{u}$; par conséquent,

$$i = -1,$$

et l'on a

$$\zeta(u_1) + \zeta(u_2) - \zeta(u_1 + u_2) = -\frac{1}{2} \frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}.$$

C'est la seconde formule fondamentale (HALPHEN, p. 138).

6. *Remarque.* — L'exactitude de l'équation

$$\sum_1^3 \int \frac{x_i^2 dx_i}{\Delta x_i} = + x_1 x_2 x_3$$

peut être démontrée comme il suit.

Posons

$$\sum_1^3 \int \lambda^2 u_i du_i = k \lambda u_1 \lambda u_2 \lambda u_3,$$

ou

$$k = \pm 1.$$

En différentiant relativement à u_1 , on obtient

$$\lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2 = -k \lambda (u_1 + u_2) (\lambda u_2 \lambda u_1 \lambda u_1 - \lambda u_1 \lambda u_2 \lambda u_2).$$

En posant ici $u_2 = 0$, nous aurons

$$\lambda^2 u_1 = k \lambda^2 u_1.$$

d'où

$$k = +1.$$

C. Q. F. D.

SUR L'ANALOGIE ENTRE LES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET TRIGONOMETRIQUES

(Nouv. Ann. de math., 3^e série, t. VIII, 1889, pp. 459-471)

1. Nous nous proposons de rechercher les fonctions transcendentes qui satisfont à l'équation

$$(1) \quad \frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u \tau^2 a} = \varphi(a) - \varphi(u).$$

Nous distinguerons deux cas : 1^o lorsque $\varphi(u)$ a deux périodes (l'une réelle 2ω , l'autre imaginaire $2\omega'$), et 2^o lorsque $\varphi(u)$ a une seule période réelle 2ω .

Premier cas. — Soit

$$\varphi(u + 2\omega) = \varphi(u), \quad \varphi(u + 2\omega') = \varphi(u).$$

En transportant les lettres a et u , nous aurons

$$(2) \quad \frac{\tau(u+a)\tau(a-u)}{\tau^2 u \tau^2 a} = \varphi(u) - \varphi(a).$$

En comparant (1) et (2), nous obtenons

$$\tau(a-u) = -\tau(u-a),$$

c'est-à-dire

$$\tau(-z) = -\tau(z),$$

d'où il suit que $\tau(u)$ est une fonction impaire de l'argument u .

Supposons

$$\lim (u-a) = 0,$$

alors

$$\lim \left[\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u \tau^2 a} \right]_{u=a} = 0;$$

donc

$$\lim [\tau(u-a)]_{u=a} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\tau(0) = 0.$$

En posant

$$u = a + 2m\omega,$$

où m est un nombre entier, nous avons

$$(3) \quad \frac{\tau(2a + 2m\omega)\tau(2m\omega)}{\tau^2(a + 2m\omega)\tau^2 a} = 0.$$

Si $\tau(u)$ est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, de l'équation (3) nous aurons

$$\tau(2m\omega) = 0.$$

D'une manière semblable, nous trouverons

$$\tau(2m'\omega') = 0;$$

par conséquent, tous les zéros de la fonction $\tau(u)$ sont compris dans la formule suivante

$$(4) \quad u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

De l'équation (1) nous aurons

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u \tau^2 a} = - \frac{\varphi(u) - \varphi(a)}{u - a}.$$

En posant ici

$$\lim (u - a) = 0,$$

et en rappelant que les deux fonctions $\tau(u)$ et $\varphi(u)$ doivent avoir des dérivées, nous obtiendrons

$$\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)} \tau'(0) = - \varphi'(u).$$

La constante $\tau'(0)$ est une quantité indéterminée. Nous prenons donc

$$\tau'(0) = 1;$$

alors

$$\varphi'(u) = - \frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}.$$

De là il suit que le développement de la fonction holomorphe $\tau(u)$, suivant les puissances ascendantes de l'argument, commence par la quantité u et aura la forme suivante

$$\tau(u) = u + \sigma_1 u^3 + \sigma_2 u^5 + \dots$$

Il est facile de constater que les infinies de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions simultanées des deux équations

$$\tau(2u) = 0, \quad \tau^4(u) = 0;$$

donc $\varphi'(u)$ devient l'infini pour toutes les valeurs de l'argument renfermées dans la formule

$$u = m\omega + m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers pairs.

Les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions de l'équation

$$\tau(2u) = 0;$$

si l'on y ajoute l'inégalité

$$\tau(u) \leq 0.$$

D'où il suit que les racines de l'équation

$$\varphi'(u) = 0$$

sont définies par la formule

$$u = (2m + 1)\omega + (2m' + 1)\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

Ainsi, dans l'intérieur du parallélogramme élémentaire $(2\omega, 2\omega')$, la fonction $\varphi'(u)$ a trois zéros

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega'$$

et un seul infini

$$u = 0.$$

Il est facile de prouver que cet infini est triple. En effet, de la formule

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)},$$

il ressort que, u étant infiniment petit, la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$-\frac{2u}{u^4} = -\frac{2}{u^3}.$$

Ainsi $\varphi'(u)$ est la fonction méromorphe doublement périodique du troisième ordre.

En faisant dans l'équation (1)

$$\lim u = 0,$$

nous trouverons que la partie principale de $\varphi(u)$ sera

$$\frac{1}{u^2};$$

par conséquent,

$$\lim [\varphi(u)]_{u=0} = \infty.$$

D'où il suit que tous les infinis de $\varphi(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

A l'intérieur du parallélogramme élémentaire

$$(2\omega, 2\omega'),$$

la fonction $\varphi(u)$ a un seul infini

$$u = 0,$$

et cet infini est double. D'où il suit que $\varphi(u)$ a à l'intérieur du même parallélogramme deux zéros ⁽¹⁾.

Il est évident que $\varphi(u)$ est la fonction méromorphe doublement périodique du deuxième ordre ⁽²⁾.

2. Nommons

$$\varphi(\omega) = e_1, \quad \varphi(\omega + \omega') = e_2, \quad \varphi(\omega') = e_3,$$

et considérons les propriétés des binômes

$$(\varphi u - e_1), \quad (\varphi u - e_2), \quad (\varphi u - e_3).$$

Le zéro du binôme $(\varphi u - e_1)$ est

$$u = \omega;$$

la même valeur de l'argument annule la fonction

$$\frac{d}{du} [\varphi(u) - e_1] = \varphi'(u):$$

donc la fonction

$$(\varphi u - e_1)$$

a à l'intérieur du parallélogramme $(2\omega, 2\omega')$ un seul zéro

$$u = \omega,$$

⁽¹⁾ BRIOT et BOUQUET. *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 241; 1875.

⁽²⁾ *Ibid.*, p. 197.

et ce zéro est double. En outre, il est clair que

$$\begin{aligned} & \wp u - e_1 \\ \text{a un infini double} & \\ & u = 0. \end{aligned}$$

Par cette raison, le produit

$$(7) \quad (\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

a trois zéros doubles

$$u = \omega, \quad u = \omega + \omega', \quad u = \omega',$$

et un seul infini sextuple

$$u = 0;$$

par conséquent, (7) est une fonction méromorphe, doublement périodique du sixième ordre.

La fonction

$$(\wp' u)^2$$

possède ces mêmes zéros et ces mêmes infinis ; par conséquent,

$$(\wp' u)^2 = A(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \quad (1),$$

où A est la quantité constante. En choisissant e_1, e_2, e_3 de manière que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

nous parvenons à la fonction $p(u)$ de M. Weierstrass, définie par l'équation différentielle

$$(\wp' u)^2 = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

3. A l'aide de cette équation et du théorème d'Abel relativement à l'addition des arguments, il est facile d'employer les deux formules suivantes,

$$\begin{aligned} p(u + u_1) + p u + p u_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' u - \wp' u_1}{p u - p u_1} \right)^2, \\ \zeta(u + u_1) - \zeta u - \zeta u_1 &= \frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' u_1}{p u - p u_1} \quad (2), \end{aligned}$$

où

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - p u \right) du.$$

(1) BRIOT et BOUQUET. *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 242 ; 1875.

(2) HALPHEN. *Traité des fonction elliptiques*, t. I, p. 29, 138 ; 1886.

En posant

$$u_1 = \omega,$$

nous aurons

$$(8) \quad \zeta(\omega + u) = \zeta u + \zeta(\omega) + \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Occupons-nous maintenant de la détermination de la fonction holomorphe $\tau(u)$, qui satisfasse à l'équation transcendante

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = p(a) - p(u).$$

En y supposant

$$a = \omega,$$

nous aurons

$$\frac{\tau(\omega+u)\tau(\omega-u)}{\tau^2 u \tau^2 \omega} = pu - e_1.$$

Les fonctions $\tau(\omega+u)$, $\tau(\omega-u)$ ont les mêmes zéros ; posons donc

$$\tau(\omega+u) = \tau(\omega-u),$$

$$\tau(u+2\omega) = -\tau u,$$

alors

$$\left(\frac{\tau(\omega+u)}{\tau u \tau \omega} \right)^2 = pu - e_1,$$

d'où

$$\log \tau(\omega+u) - \log \tau u - \log \tau \omega = \frac{1}{2} \log (pu - e_1).$$

En différentiant cette équation relativement à u , nous trouverons

$$(9) \quad \frac{\tau'(\omega+u)}{\tau(\omega+u)} - \frac{\tau'u}{\tau u} = \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Les équations (8) et (9) donnent

$$\frac{\tau'(\omega+u)}{\tau(\omega+u)} - \frac{\tau'u}{\tau u} = \zeta(\omega+u) - \zeta u - \zeta(\omega);$$

d'où il suit que les deux fonctions

$$\frac{\tau'u}{\tau u} \quad \text{et} \quad \zeta(u)$$

peuvent différer seulement par une fonction linéaire de l'argument, et par conséquent supposons

$$\frac{\tau'u}{\tau(u)} = \zeta(u) + 2\alpha u + \beta.$$

Mais $\frac{\tau' u}{\tau u}$ est une fonction impaire de l'argument, donc

$$\beta = 0,$$

et nous aurons

$$\frac{\tau' u}{\tau u} = \zeta u + 2\alpha u,$$

$$\frac{\tau'(u + \omega)}{\tau(u + \omega)} = \zeta(u + \omega) + 2\alpha u + 2\alpha \omega,$$

par conséquent

$$2\alpha \omega = -\zeta(\omega), \quad 2\alpha = -\frac{\zeta(\omega)}{\omega} :$$

donc

$$\frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \frac{\partial}{\partial u} \log \tau(u) = \zeta(u) - \frac{u\zeta(\omega)}{\omega}.$$

La fonction $\sigma(u)$ de M. Weierstrass se définit par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \sigma(u) = \zeta(u),$$

d'où

$$\tau(u) = e^{\frac{-u^2\zeta(\omega)}{2\omega}} \sigma(u).$$

La fonction $\tau(u)$ diffère de la fonction $\varkappa_1(u)$ de Jacobi seulement par le facteur constant ⁽¹⁾.

4. *Deuxième cas.* — Supposons que dans l'équation

$$-\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(u) - \varphi(a)$$

la fonction $\varphi(u)$ ait une seule et unique période réelle π . Par cette supposition, nous passons dans le domaine des fonctions trigonométriques. Il est facile de constater les propriétés suivantes :

- a) La fonction $\tau(u)$ est impaire et $\varphi(u)$ paire.
- b) Les zéros de $\tau(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = m\pi,$$

où m est un nombre entier arbitraire.

c) En posant

$$\tau'(0) = 1,$$

⁽¹⁾ HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 251 ; 1886. — BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 465 ; 1875.

nous aurons

$$\varphi'(u) = - \frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)};$$

d'où il résulte que les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont

$$u = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

et les infinis sont

$$u = m\pi.$$

d) Comme $\tau(0) = 0$, $\tau(\pi) = 0$, $\tau'(0) = 1$, la fonction $\tau(u)$ a un *maximum* pour la valeur de l'argument renfermé dans les limites

$$0 < u < \pi,$$

d'où il suit que

$$\tau'(\pi) < 0.$$

Donc, d'après la continuité de $\tau(u)$, nous concluons que

$$\tau(\pi + u), \quad \tau(\pi - u)$$

ont des signes contraires. D'autre part, ces fonctions s'annulant toujours pour une même valeur de l'argument, nous pouvons supposer

$$\tau(\pi - u) = A\tau(\pi + u),$$

où A est une constante négative. Supposons $A = -1$, alors

$$\begin{aligned} \tau(\pi - u) &= -\tau(\pi + u), \\ \tau(u + 2\pi) &= \tau(u). \end{aligned}$$

e) Prenons maintenant l'équation

$$\varphi'(u) = - \frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}.$$

Pour la valeur infiniment petite de u , la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$- \frac{2}{u^3};$$

par conséquent, si $u > 0$, nous aurons

$$\lim (\varphi'u)_{u=0} = -\infty.$$

Pour $u = \frac{\pi}{2}$, la fonction $\varphi'(u)$ devient égale à zéro, d'où il suit que, dans les limites

$$0 < u < \frac{\pi}{2},$$

notre fonction reste négative.

Par cette raison,

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\frac{\tau(\pi - 2u)}{\tau^4\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} < 0,$$

et comme $\tau(\pi + 2u)$ et $\tau(\pi - 2u)$ ont des signes contraires, nous aurons

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} + u\right) > 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi'(u)$, dans les limites

$$\frac{\pi}{2} < u < \pi,$$

reste positive. Par conséquent $\varphi(u)$, pour $u = \frac{\pi}{2}$, atteint le *minimum*. Pour la valeur u infiniment petite, la partie principale de $\varphi(u)$ est $\frac{1}{u^2}$: donc :

$$\lim (\varphi u)_{u=0} = +\infty.$$

Supposons le minimum de $\varphi(u) = m$, alors

$$\varphi(u) - m + 1$$

ne devient jamais nul pour les valeurs réelles de l'argument.

5. Nous considérons les deux fonctions trigonométriques

$$F(u) = [\varphi'(u)]^2$$

et

$$f(u) = (\varphi u - m + 1)^2(\varphi u - m).$$

Entre les limites

$$0 < u < \pi,$$

les deux fonctions ont un seul infini $u = 0$ sextuple; $F(u)$ a un zéro double $u = \frac{\pi}{2}$; cette même valeur de l'argument satisfait à l'équation

$$\varphi(u) - m = 0,$$

et, comme

$$\frac{d}{du}(\varphi u - m) = \varphi'(u)$$

s'annule pour la même valeur de l'argument, nous concluons que $f(u)$ a le zéro double

$$u = \frac{\pi}{2}$$

entre les mêmes limites. Les deux fonctions $F(u)$, $f(u)$ possèdent une même période, et, par conséquent,

$$F(u) = A\varphi(u);$$

la constante A est arbitraire. Posons $A = 4$, alors

$$\begin{aligned}(\varphi' u)^2 &= 4(\varphi u - m + 1)^2(\varphi u - m), \\ \varphi'(u) &= -2(\varphi u - m + 1)\sqrt{\varphi u - m}.\end{aligned}$$

Posons $\varphi(u) = x$, alors

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du} &= -2(x - m + 1)\sqrt{x - m}, \\ du &= -\frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}}, \\ u &= -\int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} + C.\end{aligned}$$

Mais pour $x = \varphi(u) = m$, nous aurons

$$u = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}C &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} &= \frac{\pi}{2} - u.\end{aligned}$$

En faisant $\sqrt{x - m} = \xi$, nous aurons

$$x = m + \xi^2, \quad dx = 2\xi d\xi, \quad x - m + 1 = 1 + \xi^2,$$

$$\frac{\pi}{2} - u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \text{arc tang } \sqrt{x - m},$$

$$\sqrt{x - m} = \cot u,$$

$$x = m + \cot^2 u,$$

$$\varphi(u) = m + \cot^2 u.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \cot^2 a - \cot^2 u,$$

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u \tau^2 a} = \frac{\sin(u+a) \sin(u-a)}{\sin^2 u \sin^2 a},$$

d'où il suit que

$$\tau(u) = \sin u,$$

$$\frac{d}{du} \log \tau u = \cot u.$$

Ainsi l'analogue de $p(u)$ de M. Weierstrass est $(m + \cot^2 u)$, l'analogue de $\zeta(u)$ est $\cot u$, l'analogue de $\sigma(u)$ est $\sin u$.

6. De tout ce qui précède, il découle naturellement que l'équation à trois termes ne peut pas être considérée comme caractéristique pour les fonctions elliptiques, car elle s'étend facilement aux fonctions trigonométriques. En effet, en posant

$$\cot^2 a = A, \quad \cot^2 b = B,$$

nous aurons

$$\frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\sin^2 a \sin^2 b} = B - A.$$

De l'identité

$$(B - A)(D - C) + (B - C)(A - D) + (B - D)(C - A) = 0,$$

il découle l'équation

$$\begin{aligned} & \sin(a+b) \sin(a-b) \sin(c+d) \sin(c-d) \\ & + \sin(c+b) \sin(c-b) \sin(d-a) \sin(d+a) \\ & + \sin(d+b) \sin(d-b) \sin(a+c) \sin(a-c) = 0, \end{aligned}$$

qui n'est autre chose que l'équation à trois termes, caractérisant les fonctions trigonométriques aussi bien que les fonctions elliptiques.

SUR LES INTÉGRALES PSEUDO-ELLIPTIQUES D'ABEL

(*Journal de Mathématiques de Liouville*, 4^e série, t. VI, 1890, pp. 293-311)

1. M. Günther nomme intégrales *pseudo-elliptiques* les intégrales qui, tout en présentant toutes les apparences extérieures des elliptiques, peuvent être exprimées par les fonctions algébriques et logarithmiques ⁽¹⁾. Nous nommerons *intégrales pseudo-elliptiques d'Abel* celles de la forme suivante

$$\int \frac{(x + H) dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}};$$

dans le cas où ces dernières sont exprimables par des logarithmes. M. Tchebycheff a créé la théorie d'exprimabilité des intégrales pseudo-elliptiques d'Abel par des logarithmes ⁽²⁾; les théorèmes de M. Tchebycheff ont été démontrés par feu M. Zolotareff dans un Mémoire inséré dans le tome XIX, 2^e série, du *Journal de Mathématiques*. Malgré tout le mérite du travail de Zolotareff, on ne peut s'empêcher de remarquer que sa méthode de démonstration est très compliquée, ce qui s'explique par le fait que l'auteur s'est servi pour cette démonstration des fonctions elliptiques anciennes, à l'aide desquelles l'*inversion* des intégrales elliptiques s'obtient avec une grande difficulté. Il est bien connu que la théorie nouvelle des fonctions elliptiques de Weierstrass a opéré un grand progrès dans l'Analyse. En se servant des nouvelles fonctions elliptiques, on peut atteindre la plus grande simplicité dans la question qui nous occupe.

Nous commencerons par l'inversion des intégrales elliptiques.

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X, p. 88; 1882.

⁽²⁾ *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. III; 1861.

Étant donné le polynôme

$$(1) \quad X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

le problème nommé *inversion* consiste, comme on le sait, à exprimer la variable x et $\sqrt{X}$ à l'aide des fonctions elliptiques d'un même argument. Chaque polynôme (1) se transforme en

$$X = a_0(\xi^4 + 6x_2\xi^2 + 4x_3\xi + x_4) = a_0\Psi,$$

à l'aide de la substitution

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi.$$

Nous avons encore

$$a_2 = \frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2},$$

$$a_3 = \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3}.$$

En extrayant la racine carrée $\sqrt{\Psi}$, nous trouverons que la partie entière de la racine sera

$$\xi^2 + 3x_2,$$

donc

$$\Psi = (\xi^2 + 3x_2)^2 + (4x_3\xi + x_4 - 9x_2^2).$$

Posons

$$\sqrt{\Psi} = \xi^2 + 3x_2 - \frac{2}{x_1}.$$

En chassant le radical et le dénominateur dans cette équation, nous obtiendrons les deux formes suivantes :

$$(a) \quad (4x_3\xi + x_4 - 9x_2^2)x_1^2 + 5(\xi^2 + 3x_2)x_1 - 4 = 0,$$

$$(b) \quad 4x_1\xi^2 + 4x_3x_1^2\xi + (x_4 - 9x_2^2)x_1^2 + 12x_2x_1 - 4 = 0.$$

En résolvant ces équations relativement à x_1 et ξ , nous trouvons

$$\xi = \frac{-x_3x_1^2 \pm \sqrt{x_3^2x_1^4 + (9x_2^2 - x_4)x_1^3 - 12x_2x_1^2 + 4x_1}}{2x_1},$$

$$x_1 = \frac{-(\xi^2 + 3x_2) \pm \sqrt{\xi^4 + 6x_2\xi^2 + 4x_3\xi + x_4}}{2a_3\xi + \frac{x_4 - 9x_2^2}{2}},$$

ou

$$x_1 = \frac{-(\xi^2 + 3x_2) \pm \sqrt{\Psi}}{2\alpha_3 + \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{2}},$$

$$\xi = \frac{-\alpha_3 x_1^2 \pm \sqrt{X_1}}{2x_1},$$

en posant

$$\alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1 = X_1$$

D'après la propriété bien connue des équations doublement quadratiques, nous aurons

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \quad (1).$$

Prenons

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Posons

$$x_1 = \frac{1}{z + \alpha_2},$$

alors

$$\sqrt{X_1} = \frac{1}{(z + \alpha_2)^2} \sqrt{4z^3 - (3\alpha_2 + \alpha_4)z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)}$$

$$dx_1 = -\frac{dz}{(z + \alpha_2)^2},$$

donc

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{-dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

où

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4,$$

$$g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2.$$

En posant

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = u,$$

nous aurons

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} du,$$

$$z = p(u, g_2, g_3),$$

$$-\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3} = p'(u, g_2, g_3).$$

(1) HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 333; 1888.

Posons, avec M. Halphen ⁽¹⁾,

$$\alpha_2 = -p(\varphi, g_2, g_3),$$

alors

$$[p'(\varphi, g_2, g_3)]^2 = -4\alpha_2^3 + 3\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4 + \alpha_2^3 + \alpha_3^2 = \alpha_3^2,$$

prenons

$$\sigma_3 = p'(\varphi, g_2, g_3).$$

Alors

$$x_1 = \frac{1}{pu - p\varphi},$$

$$\sqrt{X_1} = \frac{-p'u}{(pu - p\varphi)^2},$$

$$\xi = \frac{-p'\varphi}{2(pu - p\varphi)} + \frac{p'u}{2(pu - p\varphi)} = \frac{1}{2} \frac{p'u - p'\varphi}{pu - p\varphi},$$

par conséquent

$$\sqrt{\Psi} = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'\varphi}{pu - p\varphi} \right)^2 - 3p\varphi - 2pu + 2p\varphi.$$

Mais, d'après la formule d'addition, nous aurons

$$\frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'\varphi}{pu - p\varphi} \right)^2 = p(u + \varphi) + pu + p\varphi,$$

par conséquent,

$$\sqrt{\Psi} = p(u + \varphi) - pu,$$

$$\sqrt{X} = \sqrt{a_0} [p(u + \varphi) - pu],$$

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'\varphi}{pu - p\varphi}.$$

En exprimant les invariants g_2 et g_3 par les coefficients de X , nous aurons

$$g_2 = \frac{1}{a_0^2} (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2),$$

$$g_3 = \frac{1}{a_0^3} (a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1 a_4).$$

2. Comme base de l'argument elliptique, nous avons pris

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \sqrt{a_0} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

⁽¹⁾ HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 120.

Posons

$$z = \frac{t}{a_0}, \quad g_2 = \frac{h_2}{a_0^2}, \quad g_3 = \frac{h_3}{a_0^3};$$

alors

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = -\sqrt{a_0} \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - h_2t - h_3}},$$

par conséquent,

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - h_2t - h_3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{X}};$$

d'où il découle que, pour le passage de l'argument

$$u = -\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

à l'argument

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

il faut changer en z en a_0z , g_2 en $a_0^2g_2$, g_3 en $a_0^3g_3$.

Par cette raison, nous aurons

$$p\left(\frac{\varphi}{\sqrt{a_0}}, a_0^2g_2, a_0^3g_3\right) = -a_0z_2,$$

$$p'\left(\frac{\varphi}{\sqrt{a_0}}, a_0^2g_2, a_0^3g_3\right) = a_0^{\frac{3}{2}}x_3.$$

Donc, en rapportant $p\varphi$ à l'argument

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

nous devons changer les invariants

$$g_2, \quad g_3$$

dans les invariants

$$a_0^2g_2, \quad a_0^3g_3.$$

et alors nous aurons

$$p(\varphi) = -a_0z_2, \quad p'\varphi = a_0^{\frac{3}{2}}x_3.$$

Cette remarque importante nous servira dans la suite.

3. Trouvons maintenant les conditions d'intégrabilité de différentielles

$$\frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}}$$

par des logarithmes.

En remarquant que

$$x + H = -\frac{a_1}{a_0} + H + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'\varphi}{pu - p\varphi}$$

et

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} du$$

nous obtiendrons

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int \left(\frac{1}{2} \frac{p'u - p'\varphi}{pu - p\varphi} + H - \frac{a_1}{a_0} \right) du.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2} \frac{p'u - p'\varphi}{pu - p\varphi} = \zeta(u + \varphi) - \zeta(u) - \zeta(\varphi) \quad (1),$$

nous aurons

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int \left[\zeta(u + \varphi) - \zeta u - \zeta \varphi + H - \frac{a_1}{a_0} \right] du. \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log \frac{\sigma(u + \varphi)}{\sigma u} + \left(H - \frac{a_1}{a_0} - \zeta \varphi \right) u. \end{aligned}$$

En posant

$$H - \frac{a_1}{a_0} - \zeta \varphi = J,$$

(1) HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. I, p. 138.

nous aurons

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log \left[e^{Ju} \frac{\sigma(u + \varphi)}{\sigma u} \right] \\ &= \frac{1}{m\sqrt{a_0}} \log e^{mJu} \left[\frac{\sigma(u + \varphi)}{\sigma u} \right]^m, \end{aligned}$$

où m est entier positif.

On sait que

$$e^{mJu} \left[\frac{\sigma(u + \varphi)}{\sigma u} \right]^m$$

est exprimable rationnellement par $p(u)$ et $p'(u)$ si

$$(1) \quad \varphi = -\frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

$$(2) \quad J = \frac{2\tilde{\eta}_1}{m} \quad (1)$$

Le choix de H , par la nature du problème, dépend de notre volonté. Si $\varphi = -\frac{2\tilde{\omega}}{m}$, nous prendrons

$$H = \frac{2\tilde{\eta}_1}{m} - \zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) + \frac{a_1}{a_0},$$

alors

$$J = \frac{2\tilde{\eta}_1}{m};$$

mais avec cette valeur de J , l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}}$$

s'exprime par les logarithmes.

Ainsi ayant

$$\alpha_2 = \frac{a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2} = -p\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right)$$

et supposant

$$H = \frac{2\tilde{\eta}_1}{m} - \zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) + \frac{a_1}{a_0},$$

(1) HALPHEN *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. I, p. 224.

on peut exprimer

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}}$$

par une fonction logarithmique des quantités

$$pu = z \quad \text{et} \quad p'u = -\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}$$

et, par conséquent, par une fonction logarithmique de x .

4. Soit m un nombre impair ; alors on peut satisfaire à la congruence

$$2^s \equiv 1 \pmod{m}$$

par s entier et positif.

Posons

$$2^s - 1 = lm,$$

l étant entier ; alors

$$2^s \varphi = -(lm + 1) \frac{2\tilde{\omega}}{m}$$

ou

$$2^s \varphi = -2l\varpi - \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

par conséquent,

$$p(2^s \varphi) = p\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) = p(\varphi).$$

D'où il suit qu'en doublant successivement l'argument s fois, nous arrivons au résultat

$$p(2^s \varphi) = -\varpi_2.$$

Maintenant posons m pair ; alors nous aurons

$$m = 2^i n,$$

où n est impair. En doublant l'argument

$$\varphi = -\frac{2}{m}$$

successivement i fois, nous trouverons

$$2^i \varphi = -\frac{2\tilde{\omega}}{n} = \varphi_1.$$

Posons

$$2^k - 1 = ln :$$

nous aurons

$$2^k \varphi_1 = - (ln + 1) \frac{2\tilde{\omega}}{n},$$

$$p(2^{i+k}\varphi) = p(\varphi_1) = p(2^i\varphi).$$

D'où il suit, qu'en doublant l'argument v successivement $(i + k)$ fois, nous trouverons

$$p(2^{i+k}\varphi) = p(2^i\varphi).$$

Donc, si l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}}$$

est exprimable par des logarithmes, nous trouverons nécessairement en doublant l'argument v , défini par l'équation,

$$p(\varphi) = \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_0^2}$$

ou

$$p(2^s\varphi) = p(\varphi),$$

ou

$$p(2^{i+k}\varphi) = p(2^i\varphi).$$

Il est facile de prouver que le théorème inverse est aussi juste. En effet, de la condition

$$p(2^s\varphi) = p(\varphi)$$

nous tirons

$$2^s\varphi = \varphi \pm 2\tilde{\omega},$$

d'où

$$\varphi = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^s - 1} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m}.$$

Egalement de la condition

$$p(2^{i+k}\varphi) = p(2^i\varphi)$$

nous tirons

$$2^{i+k}\varphi = 2^i\varphi \pm 2\tilde{\omega},$$

d'où

$$\varphi = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^i(2^k - 1)} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

mais dans le n° 3 nous avons démontré que, si

$$\varphi = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x + \Pi)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

5. Dans le n° 2 nous avons transformé le polynôme

$$X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

en un nouveau polynôme

$$X_1 = \alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1,$$

et nous avons obtenu

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Faisons la même transformation avec le polynôme X_1 . Dans ce but nous posons

$$x_1 = \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{\alpha_3^2} + \xi_1;$$

nous aurons

$$X_1 = \alpha_3^2(\xi_1^4 + 6\beta_2\xi_1^2 + 4\beta_3\xi_1 + \beta_4),$$

où les coefficients $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ sont composés des coefficients du polynôme X_1 comme $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ des coefficients du polynôme X ; par conséquent,

$$\beta_2 = - \frac{2\alpha_2\alpha_3^2 + \left(\frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{4}\right)^2}{\alpha_3^4} = - \frac{32\alpha_2\alpha_3^2 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^2}{16\alpha_3^4}.$$

Calculons maintenant, à l'aide de la formule de duplication de l'argument, $p(2v)$. Nous avons

$$\begin{aligned} p(2v) &= -2pv + \frac{1}{4} \left(\frac{2p''v}{2p'v} \right)^2 \\ &= -2pv + \frac{1}{4} \left(\frac{12p^2v - g_2}{2p'v} \right)^2 = \frac{32\alpha_2\alpha_3^2 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^2}{16\alpha_3^4}. \end{aligned}$$

Le calcul montre que

$$p(2v) = -\alpha_3^2\beta_2.$$

Calculons maintenant $p'(2v)$ et β_3 . Nous aurons

$$p'(2v) = -p'v + \frac{1}{4} \frac{p''v}{p'v} \left[\frac{p'''v}{p'v} - \left(\frac{p''v}{p'v} \right)^2 \right].$$

De l'équation

$$p'^2(v) = 4p^3v - g_2pv - g_3$$

nous tirons

$$2p''v = 12p^2v - g_2,$$

$$p'''(v) = 12pv p'v,$$

par conséquent,

$$\frac{p''v}{p'v} = \frac{12x_2^2 - 3x_2^2 - x_4}{2x_3} = \frac{9x_2^2 - x_4}{2x_3},$$

$$\frac{p'''v}{p'v} = -12x_2;$$

donc

$$p'(2v) = -\frac{32x_3^4 + 48x_2x_3^2(9x_2^2 - x_4) + (9x_2^2 - x_4)^3}{32x_3^3},$$

nous trouverons encore

$$\beta_3 = \frac{32x_3^4 + 48x_2x_3^2(9x_2^2 - x_4) + (9x_2^2 - x_4)^3}{32x_3^6},$$

d'où

$$p'(2v) = -x_3^3\beta_3.$$

L'expression ci-dessus s'accorde pleinement avec la remarque du n° 2. En effet, nous avons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{x_3} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

où

$$X_2 = \beta_3^2 x_2^4 + (9\beta_3^2 - \beta_4)x_2^3 - 12\beta_2 x_2^2 + 4x_2.$$

Si nous prenions comme base de l'argument

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

en supposant

$$-\beta_2 = p(w),$$

nous aurions

$$p'(w) = \pm \beta_3.$$

Pour passer de l'argument

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}$$

à l'argument

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

avec les invariants g_2, g_3 , il faut multiplier $p(w)$ par α_3^2 , $p'(w)$ par $(\alpha_3^2)^{\frac{3}{2}} = \alpha_3^3$; par conséquent, nous obtiendrons les résultats

$$\begin{aligned} p(2v) &= -\alpha_3^2 \beta_2, \\ p'(2v) &= \pm \alpha_3^3 \beta_3. \end{aligned}$$

Le calcul a montré que

$$p(2v) = \alpha_3^2 \beta_2, \quad p'(2v) = -\alpha_3^3 \beta_3.$$

En répétant, avec le polynôme X_2 , la même transformation, nous aurons évidemment,

$$\begin{aligned} p(4v) &= -\alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_2, \\ p'(4v) &= \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3, \end{aligned}$$

où les coefficients γ sont composés des coefficients du polynôme X_2 , comme les coefficients β sont composés des coefficients du polynôme X_1 . Plus loin nous aurons évidemment

$$\begin{aligned} p(8v) &= -\alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_3^2 \delta_2, \\ p'(8v) &= -\alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \delta_3, \\ p(16v) &= -\alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_3^2 \delta_3^2 \varepsilon_2, \\ p'(16v) &= -\alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \delta_3^3 \varepsilon_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

d'où il suit que les séries

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_2, & \alpha_3^2 \beta_2, & \alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_2, & \alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_3^2 \delta_2, & \alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_3^2 \delta_3^2 \varepsilon_2, & \dots; \\ \alpha_3, & \alpha_3^3 \beta_3, & \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3, & -\alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \delta_3, & \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \delta_3^3 \varepsilon_3, & \dots \end{array}$$

doivent être périodiques.

Donc, étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}},$$

où H est indéterminé, et devant résoudre la question d'exprimabilité de l'intégrale par des logarithmes, on peut le faire de deux manières :

1° En recherchant le polynôme

$$\Psi = \xi^4 + 6x_2\xi^2 + 4x_3\xi + \alpha_4,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} -\alpha_2 &= p(\nu), & \alpha_3 &= p'(\nu), \\ g_2 &= 3x_2^2 + \alpha_4, & g_3 &= \alpha_2\alpha_4 - \sigma_2^2 - \alpha_3^2. \end{aligned}$$

Au moyen des formules de duplication de l'argument, nous calculerons successivement

$$\begin{array}{cccc} p(2\nu), & p(4\nu), & p(8\nu), & \dots, \\ p'(2\nu), & p'(4\nu), & p'(8\nu), & \dots \end{array}$$

Si ces séries sont périodiques, on peut choisir Π de telle manière que l'intégrale s'exprime par des logarithmes.

2° En composant la série des polynômes

$$X, \quad X_1, \quad X_2, \quad \dots,$$

nous calculons les séries des quantités

$$\begin{array}{cccc} \alpha_2, & \alpha_3^2\beta_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2, & \dots, \\ \alpha_3, & \alpha_3^3\beta_3, & \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3, & \dots \end{array}$$

Si ces séries sont périodiques, l'intégrale s'exprime par des logarithmes. Dans ce cas, il est indifférent que la période commence au terme $p\nu$ ou à un autre terme quelconque.

6. Dans le n° 1, en faisant l'inversion de l'intégrale elliptique, nous avons trouvé qu'en prenant

$$-\alpha_2 = p(\nu, g_2, g_3)$$

nous avons

$$\alpha_3 = p'(\nu, g_2, g_3).$$

Mais, dans le n° 5, nous avons vu que

$$2p''\nu = 9x_2^2 - \alpha_4 = 9p^2\nu - \alpha_4,$$

donc

$$\alpha_4 = 9p^2\nu - 2p''\nu.$$

D'après la transformation, nous avons changé le polynôme

$$X_1 = \sigma_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12x_2x_1^2 + 4x_1$$

en le polynôme

$$X_2 = \beta_3^2 x_1^4 + (9\beta_2^2 - \beta_4)x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1.$$

Par cette transformation, nous avons eu

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}.$$

Si nous prenons pour base de l'argument elliptique

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

en posant

$$-\beta_2 = p(\varphi_1),$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \beta_3 &= p'(\varphi_1), \\ \beta_4 &= 9p^2(\varphi_1) - 2p''(\varphi_1). \end{aligned}$$

Si nous passons à l'argument

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

c'est-à-dire aux invariants g_2, g_3, v_1 se transforme en $2v, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ se transformeront en $\alpha_3^2 \beta_2, \alpha_3^3 \beta_3, \alpha_3^4 \beta_4$.

D'où il découle qu'après les transformations nous aurons encore une série périodique

$$\alpha_1, \quad \alpha_3^4 \beta_4, \quad \alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_4, \quad \alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_3^4 \delta_4, \quad \dots$$

7. Supposons que nous ayons

$$\begin{aligned} \alpha_3^2 \beta_3^2 \gamma_3^2 \dots \pi_3 \rho_2 &= \alpha_2, \\ \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3^3 \dots \pi_3^3 \rho_3 &= \alpha_3, \\ \alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_3^4 \dots \pi_3^4 \rho_4 &= \alpha_4. \end{aligned}$$

Grâce à la série des transformations, nous trouverons

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} &= \frac{1}{\alpha_3} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3} \frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \dots = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \dots \pi_3} \frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}}, \\ \frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} &= \frac{d\xi_n}{\sqrt{\Psi_n}}, \end{aligned}$$

où

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\rho_2 \xi_n^2 + 4\rho_3 \xi_n + \rho_4.$$

Supposons

$$\xi_n = \frac{\eta}{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \dots \pi_3},$$

alors

$$\Psi_n = \frac{1}{\alpha_3^4 \beta_3^4 \gamma_3^4 \dots \pi_3^4} (\eta^4 + 6\alpha_3^2 \beta_3^2 \dots \pi_3^2 \eta^2 + 4\alpha_3^3 \beta_3^3 \dots \pi_3^3 \eta + \alpha_3^4 \beta_3^4 \dots \pi_3^4)$$

ou

$$\sqrt{\Psi_n} = \frac{1}{\alpha_3^2 \beta_3^2 \dots \pi_3^2} \sqrt{\eta^4 + 6\alpha_3^2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4},$$

d'où

$$\frac{d\xi_n}{\sqrt{\Psi_n}} = \pm \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \dots \pi_3 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_3^2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4}},$$

par conséquent,

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_3^2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4}}.$$

En posant

$$\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_3^2 \eta^2 + 4\alpha_3 \eta + \alpha_4} = \eta^2 + 3\alpha_3 - \frac{2}{y},$$

nous aurons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

où

$$Y = \alpha_3^2 y^4 + (9\alpha_3^2 - \alpha_4)y^3 - 12\alpha_3 y^2 + 4y,$$

c'est-à-dire que les polynômes X_1 et Y se distingueront seulement par des variables. Donc, si l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes, par une série de transformations, nous devons obtenir

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3} \frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \dots = \frac{1}{\alpha_3 \beta_3 \dots \pi_3} \frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

où le polynôme final possède les mêmes coefficients que le polynôme primitif.

De l'équation d'Euler

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

nous tirons

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} + C.$$

En passant aux intégrales définies, nous pouvons prendre pour limites inférieures une même quantité. En effet, les variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ y sont liées entre elles par $(n + 1)$ équations doublement quadratiques auxquelles nous pouvons toujours adjoindre l'égalité

$$x_1 = y.$$

Alors nous aurons

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int_a^y \frac{dx}{\sqrt{Y}}.$$

Par conséquent, il est toujours possible de faire

$$C = 0,$$

alors

$$x_1 = y.$$

D'après les formules du n° 1, nous avons

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi = -\frac{a_1}{a_0} + \left(\frac{-\alpha_3 x_1}{2} - \frac{1}{2x_1} \sqrt{X_1} \right),$$

par conséquent,

$$\frac{(x + H)dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left(\frac{2a_0 H - 2a_1 - a_0 \alpha_3 x_1}{2a_0} - \frac{1}{2x_1} \sqrt{X_1} \right) \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}};$$

d'où il suit que nous avons en général,

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{X}} = -\frac{1}{2\sqrt{a_0}} \log x_1 + \int \frac{(aH + b + cx_1)dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

où a, b, c sont des constantes déterminées.

Donc, si dans la série des polynômes

$$\Psi = \xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4,$$

$$\Psi_1 = \xi_1^4 + 6\beta_2\xi_1^2 + 4\beta_3\xi_1 + \beta_4,$$

le dernier est de la forme

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\rho_3\xi_n^2 + \rho_4,$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\sqrt{R}$ EN FRACTION CONTINUE

(Nouv. Ann. de math., 3^e série, t. X, 1891, pp. 134-140)

Je me propose d'exposer ici la démonstration très simple des quelques théorèmes insérés dans le Mémoire d'Abel *Sur l'intégration de la formule différentielle*, etc. ⁽¹⁾.

THÉORÈME I. — R étant une fonction entière de x , $\sqrt{R}$ se développe en fraction continue illimitée.

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

où $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ sont des fonctions entières, y_i est l'un des quotients complets quelconque. Je dis que y_i est racine de l'équation

$$Ay_i^2 + 2By_i - C = 0,$$

où

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

p_i, q_i étant des fonctions entières, et les coefficients A, B, C satisfaisant à l'égalité

$$B^2 - AC = R.$$

Démonstration. — Posons

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{i-1} + \frac{1}{q_{i-1}}}}} &= \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}, \\ \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{i-1} + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{q_i}}}}} &= \frac{p_i}{q_i}, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *OEuvres complètes*, t. I, p. 104 et suiv.; 1881.

alors on aura

$$\sqrt{R} = \frac{p_i y_i + p_{i-1}}{q_i y_i + q_{i-1}}$$

ou

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

D'où il suit que

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

$$B^2 - AC = (p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1})^2 R = R, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II. — Soit

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

où y_i est l'une des racines de l'équation

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

Si

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$

a étant constant, pour i impair, nous aurons

$$a = 1.$$

Démonstration. — Des équations

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$

$$p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^{i-1} = 1,$$

on déduit

$$q_i q_{i-1} R - p_i p_{i-1} = \frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i},$$

d'où il suit que

$$\frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i}$$

est une fonction entière. Mais, comme

$$\delta p_i > \delta q_i > \delta q_{i-1} \quad (1),$$

(1) δp_i est le degré de la fonction p_i (Oeuvres complètes, t. I, p. 108 et suiv.).

il est évident que aq_{i-1} est le reste de la division de p_i par q_i . Par conséquent,

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{aq_{i-1}}{q_i},$$

ou

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{1}{a^{-1} \frac{q_i}{q_{i-1}}}.$$

Mais

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i}}},$$

donc

$$\frac{a^{-1}q_i}{q_{i-1}} = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots}},$$

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \frac{1}{a\alpha_3 + \dots}},$$

D'après une propriété bien connue des fractions continues, nous aurons ⁽¹⁾

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i-1} + \frac{1}{\alpha_{i-2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i}}}.$$

Donc

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i-1} + \dots + \frac{1}{\alpha_i}} = a\alpha_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i}}.$$

Cette égalité entraîne les suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_i &= a\alpha_1, \\ \alpha_{i-1} &= a^{-1}\sigma_2, \\ \alpha_{i-2} &= a\alpha_3, \\ &\dots \dots \dots, \\ \alpha_1 &= a^{-1}\sigma_i. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 30; 1866.

Si i est impair, en posant

$$i = 2k + 1,$$

nous aurons

$$\alpha_{i-k} = a^{\pm 1} \alpha_{k+1},$$

ou

$$\alpha_{k+1} = a^{\pm 1} \alpha_{k+1},$$

$$a^{\pm 1} = 1,$$

et enfin

$$a = 1.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME III. — Si, dans le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue, l'un des quotients complets y_i satisfait à l'équation

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

où

$$a = \pm (p_i^2 - q_i^2 R)$$

est une quantité constante, la fraction continue est nécessairement périodique.

Démonstration. — Étant donné

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

De l'équation

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

nous tirerons

$$y_i = \frac{-b + \sqrt{R}}{a},$$

$$y_i = \frac{-b + \alpha + \frac{1}{y}}{a},$$

et, en posant,

$$\frac{-b + \alpha}{a} = \beta,$$

nous aurons

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

Cela posé, distinguons, avec Abel, deux cas.

Premier cas. — Le nombre $i = 2k + 1$, k étant entier. Dans ce cas

$$a = 1,$$

donc

$$y_i = \beta + \frac{1}{y},$$

donc la fraction continue

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}}}}}$$

est évidemment périodique. En outre nous avons vu que pour i impair

$$\alpha_{i-m} = \alpha_{m+1}.$$

En posant successivement

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, (k-1), k,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_1, \\ \alpha_{i-1} &= \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{k-2} &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Par conséquent les quotients incomplets de la fraction continue formeront la série suivante

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_k, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \beta, \dots$$

Deuxième cas. — Posons

$$i = 2k.$$

Nous avons

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

Mais

$$y = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

donc

$$ay = ax_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \frac{1}{ax_3 + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i + \frac{1}{ay_i}}}}$$

ou

$$ay = ax_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \frac{1}{ax_3 + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i + \frac{1}{a\beta + \frac{1}{y}}}}}$$

et par conséquent

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \alpha_i + \frac{1}{\beta + \frac{1}{ax_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \frac{1}{ax_3 + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i + \frac{1}{a\beta + \frac{1}{\alpha_1 + \dots}}}}}}}}}}$$

Il suit de là que les quotients incomplets forment la série

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_i, & \beta, & & & & & \\ ax_1, & a^{-1}\alpha_2, & ax_3, & \dots, & a^{-1}\alpha_i, & a\beta, & \alpha_1, & \dots, & & & \end{array}$$

La période se compose des nombres suivants

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta, ax_1, a^{-1}\alpha_2, \dots, a^{-1}\alpha_i, a\beta.$$

Ainsi, dans les deux cas, $\sqrt{R}$ se développe en fraction continue périodique.

C. Q. F. D.

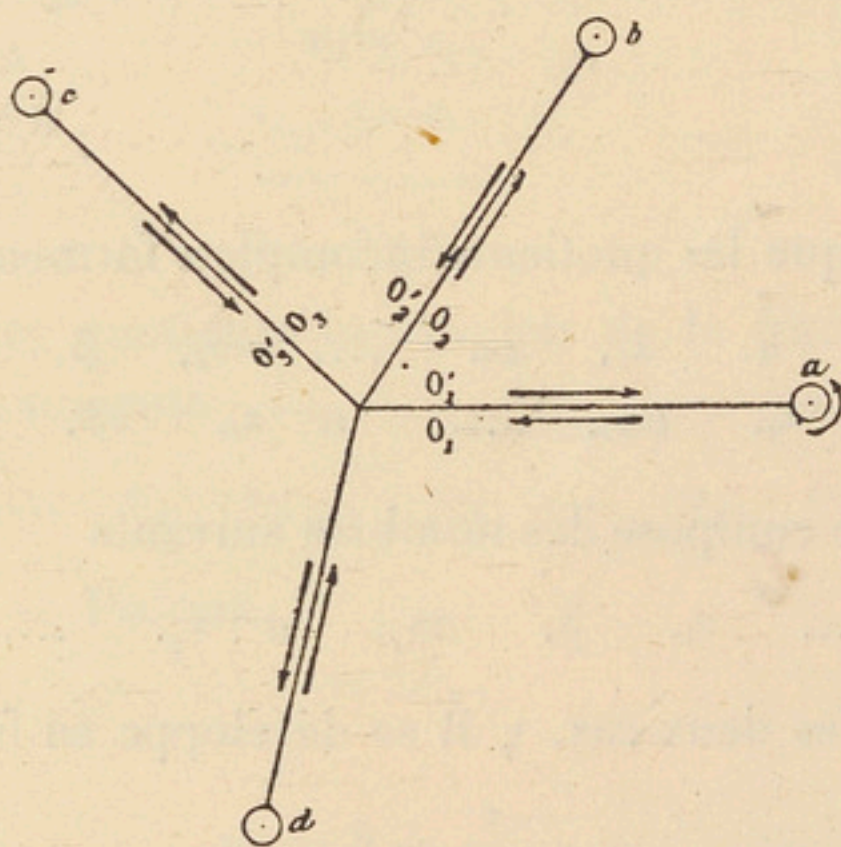
REMARQUES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES

(Nouv. Ann. de math., 3^e série, t. X, 1891, pp. 478-502)

I

On sait que, dans l'étude des fonctions abéliennes, on peut se borner à la considération du cas particulier, quand l'équation fondamentale algébrique irréductible ne possède que les points critiques de second ordre. Nous nous occuperons des intégrales abéliennes de première espèce, c'est-à-dire des intégrales conservant une valeur finie sur toute la surface de la sphère.

Fig. 1.



Supposons que les intégrales abéliennes dépendent de l'équation algébrique irréductible

$$f(x, y) = 0$$

qui possède les points critiques de second ordre. Autour de chacun de ces points ne se permutent que deux des n racines de

l'équation. Dans chaque lacet nous distinguerons le commencement et la fin; ainsi le commencement du lacet (b) est le point O_2 , la fin O'_2 ; il est inutile d'ajouter que les points $O_1, O'_1, O_2, O'_2, \dots$ sont infiniment voisins, ou, si l'on veut, coïncident avec l'origine des coordonnées. Néanmoins, pour plus de détermination, nous prendrons que l'origine des coordonnées se trouve toujours au point O_1 , et nous supposerons que la variable complexe se meut toujours dans la même direction indiquée par les flèches; cette direction sera positive. La propriété fondamentale, bien connue, de la fonction algébrique y est la suivante. En partant de l'origine des coordonnées O_1 et en se mouvant successivement par tous les lacets, nous reviendrons à l'origine des coordonnées avec la même racine qu'au commencement.

Nous donnerons le nom de *première feuille* à la surface infinie sur laquelle la fonction y_1 arrive à l'origine des coordonnées avec la même valeur, en variant continuellement par tous les contours élémentaires dans la même direction (dans notre recherche, cette direction sera toujours contraire à la direction de l'aiguille de l'horloge); la surface ayant le même caractère pour la fonction y_2 portera le nom de *seconde feuille*; en général, une surface possédant le même caractère pour y_k sera la feuille $k^{\text{ième}}$. On peut supposer, si l'on veut, ces feuilles superposées comme dans le système de Riemann; mais nous employons l'expression *feuille* dans le sens d'un simple terme, ne joignant à ce mot aucune signification matérielle. Si la fonction y , après avoir passé par la variable complexe du lacet, arrive à l'origine des coordonnées avec une valeur nouvelle, nous dirons que le lacet est *actif*; si, au contraire, dans les mêmes conditions, la fonction ne change pas de valeur, nous dirons que le lacet est *passif*. Si, autour du point critique c , se permutent deux racines y_i, y_k , le lacet $(c)_i^k$ joue sur deux feuilles un rôle actif. Pour déterminer les numéros de ces feuilles, il faut agir de la manière suivante. Partons de l'origine O_3 du lacet c avec la racine y_i et avançons dans la direction positive jusqu'à ce que nous arrivions à l'origine des coordonnées O_1 . Si nous sommes arrivés au point O_1 avec la racine y_λ , nous dirons que le lacet $(c)_i^k$, avec son indice i , appartient à la feuille λ . Partons ensuite du point O_3 (l'origine du lacet c) avec la racine y_k et avançons dans la direction positive jusqu'à l'origine des coordonnées O_1 .

Si nous sommes arrivés au point O_1 avec la racine y_B , nous dirons que le lacet $(c)_i^k$ avec son indice k appartient à la feuille B. La propriété des lacets énoncés ci-dessus entraîne une propriété encore plus intéressante que nous expliquerons par un exemple. Posons que le lacet $(c)_i^k$ permute deux racines y_i, y_k et, par conséquent, appartient par ses indices aux deux feuilles A, B. Partons dès l'origine des coordonnées O_1 avec la racine y_A ; nous arriverons au point O_3 avec la racine y_i ; après cela, il faudrait traverser le lacet $(c)_i^k$ et alors la fonction dans le point O_3 acquerrait la valeur y_k . Si nous passons directement du point O_3 au point O'_3 , sans décrire le lacet $(c)_i^k$, nous arriverons au point O'_3 avec la racine y_i et non avec la racine y_k comme il l'aurait fallu. Mais sortir du lacet $(c)_i^k$, avec la racine y_i , signifie y entrer avec la racine y_k . Et, comme le lacet $(c)_i^k$ appartient par son indice k à la feuille B, l'omission du lacet actif $(c)_i^k$ équivaut au passage à une feuille nouvelle. D'où suit la conclusion :

Si l'on fait, à la place où se trouve le point critique c , la coupure des deux feuilles A, B de manière que le point critique disparaisse pour toujours et que l'on commence au point O_1 avec la racine y_A , en transversant la coupure, y ne change pas de valeur, mais le mouvement ne fera que passer dans une feuille nouvelle.

THÉORÈME I. — *Si l'on part de l'origine des coordonnées O_1 avec une racine de l'équation*

$$f(x, y) = 0,$$

et si l'on se meut dans la direction positive en passant successivement d'un lacet à un autre, on peut choisir des lacets tels qu'en les supprimant complètement on parvienne au passage continu d'une feuille à une autre jusqu'à ce que toutes les feuilles soient épuisées; après quoi s'effectuera le passage de la dernière feuille à la première; en opérant ainsi, nous ferons autant de tours complets qu'il y avait de feuilles et nous formerons autant de coupures qu'il y avait de feuilles moins une; chaque feuille, pendant ce mouvement, sera passée en entier et seulement une fois.

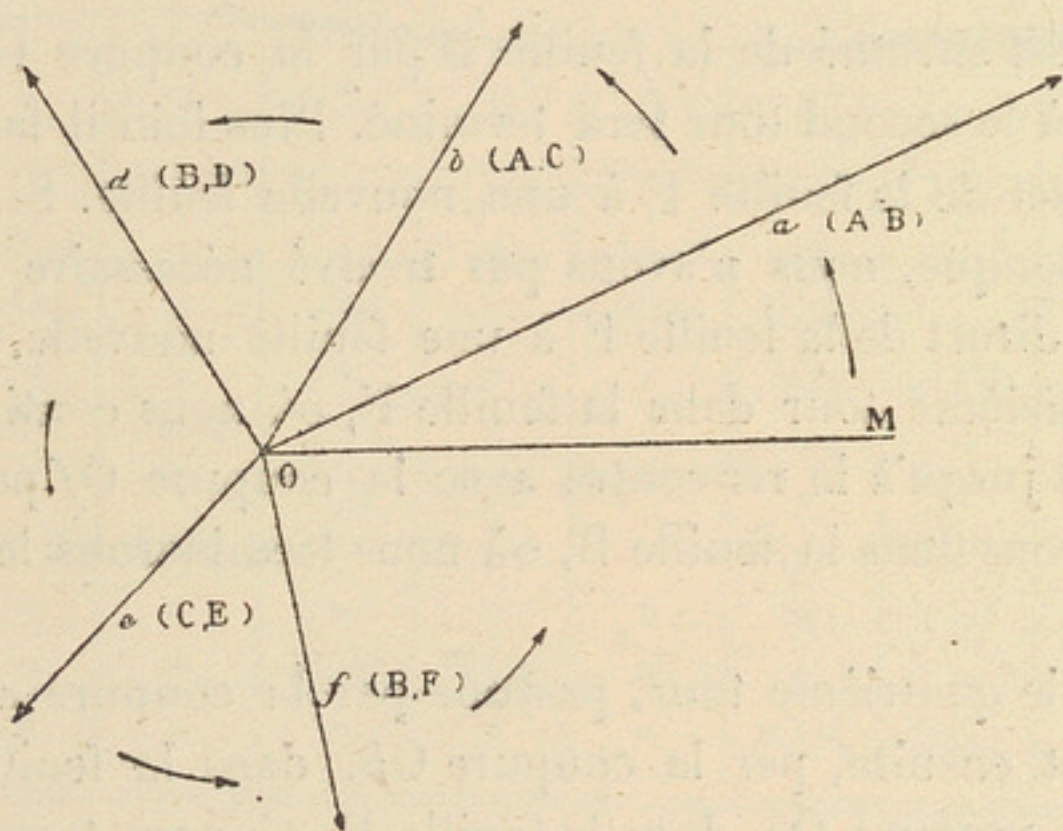
Démonstration. — Soit le point O l'origine des coordonnées, et M le premier point critique que la variable complexe doit décrire (le point M est donc tout à fait arbitraire). Posons que le mouvement commence à la feuille A; par conséquent, on part de

l'origine des coordonnées avec la racine γ_A et l'on commence le mouvement dans la direction positive. Parmi les lacets actifs appartenant à la feuille A, prenons arbitrairement un seul pour la formation de la première coupure. Posons que le lacet destiné à la coupure joue un rôle actif sur deux feuilles A et B; soit ce lacet

$$a(A, B).$$

Coupons deux feuilles A et B par la ligne infinie Oa . Alors, pendant le mouvement continu de la variable complexe, nous décrirons dans la feuille A l'angle MOa et, par la coupure Oa , nous passerons dans la feuille B. La seconde coupure doit servir

Fig. 2.



au passage dans une feuille nouvelle. On peut passer à la feuille nouvelle soit de la feuille B, soit de la feuille A; cela dépend entièrement de notre volonté. Si nous voulons passer à une feuille nouvelle de la feuille A, après avoir fait le premier tour, nous arriverons à l'origine des coordonnées avec la racine γ_B ; le second tour commencera à la feuille B et nous devons décrire, dans cette feuille, l'angle MOa jusqu'à la coupure Oa ; par cette coupure nous passons encore à la feuille A et, par une nouvelle coupure, de la feuille A dans une nouvelle feuille, comme nous l'avons voulu. Mais, si nous voulons passer dans une nouvelle feuille de la feuille B, ce passage devra s'effectuer pendant le premier tour; il faudra alors faire une nouvelle coupure dans l'angle

$$aOM = 2\pi - MOa;$$

la ligne Od marquera cette coupure. Cette coupure existant, le passage dans une nouvelle feuille s'accomplira pendant le premier tour. En effet, par la coupure Oa , nous passerons à la feuille B et, par la coupure Od à la feuille D ; et comme nous ne rencontrerons aucune coupure donnant un passage à une nouvelle feuille, le premier tour sera terminé à l'origine des coordonnées et dans la feuille D, par conséquent avec la racine y_0 .

Le second tour commencera à la feuille D et y continuera jusqu'à la rencontre avec la coupure Od par laquelle le mouvement passera dans la feuille B. Comme nous n'avons pas voulu passer de la feuille D à une feuille nouvelle, nous devons effectuer ce passage de la feuille B ou de la feuille A. Sur notre figure, le passage est effectué de la feuille B par la coupure Of dans la feuille F, où le second tour sera terminé. Plus loin il faudra avoir soin de passer de la feuille F à une nouvelle feuille. Si, pour une cause quelconque, nous n'avons pas trouvé nécessaire d'effectuer un passage direct de la feuille F à une feuille nouvelle, commençons le troisième tour dans la feuille F, où nous continuerons le mouvement jusqu'à la rencontre avec la coupure Of par laquelle nous passerons dans la feuille B, où nous terminerons le troisième tour.

Pendant le quatrième tour, passons par la coupure aO dans la feuille A et ensuite, par la coupure Ob , dans la feuille C, plus loin, par la coupure Oe , dans la feuille E, où nous terminerons le quatrième tour. S'il n'y a plus de nouvelles feuilles, le quatrième tour se terminera dans la feuille E. Pendant le cinquième, passons par la coupure Oe dans la feuille C, où nous terminerons le cinquième tour. Pendant le sixième tour, passons par la coupure Ob dans la première feuille, où nous terminerons le sixième mouvement. Nous avons eu six feuilles, nous avons fait autant de tours et cinq coupures. Le mouvement dans une feuille quelconque commence depuis la coupure avec l'indice de cette feuille et continue jusqu'à une nouvelle coupure avec ce même indice. Outre cela, le mouvement ne se répète plus dans le même ordre. Pour cette raison, le mouvement dans une feuille quelconque, par exemple B, aura lieu dans les angles

$$aod + dof + foa = 2\pi.$$

Ainsi le théorème est prouvé. Voici un exemple : Soient neuf feuilles marquées des numéros 1, 2, ..., 9. Par les points critiques sont faites des coupures dont l'ordre, pendant le mouvement dans la direction positive, est le suivant

$$\begin{array}{cccc} a(1,2), & b(1,3) & c(2,4), & d(2,5) \\ e(3,9), & f(4,6) & g(5,8), & h(1,7) \end{array}$$

Le Tableau ci-joint contient les angles décrits dans chaque feuille pendant chacun des neuf tours :

Numéro de la feuille	Tours								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	MOa	»	»	»	»	aob	»	bOh	hOM
2	aOc	»	cOd	»	dOM	MOa	»	»	»
3	»	»	»	»	»	bOe	eOM	MOb	»
4	cOf	fOM	MOc	»	»	»	»	»	»
5	»	»	dOg	gOM	MOd	»	»	»	»
6	fOM	MOf	»	»	»	»	»	»	»
7	»	»	»	»	»	»	»	hOM	MOh
8	»	»	gOM	MOg	»	»	»	»	»
9	»	»	»	»	»	eOM	MOe	»	»

THÉORÈME II. — Prenons deux intégrales abéliennes indépendantes, de première espèce, u et v . Si nous intégrons suivant le contour déterminé par le théorème précédent, l'intégrale

$$\int u dv$$

sera égale à zéro.

Pour démontrer, remarquons que l'intégrale prise suivant la totalité de tous les lacets actifs d'une feuille quelconque dans la direction positive, d'après le théorème de Cauchy, est égale à zéro, puisque l'infinité n'est pas le point critique de la fonction y dont dépendent les intégrales abéliennes.

Indiquons l'intégrale prise dans la totalité des lacets actifs de la première feuille par

$$H(I),$$

pour la seconde feuille

$$H(II), \dots;$$

alors nous avons

$$H(I) = H(II) = H(III) = \dots = 0.$$

Nous désignerons ainsi l'intégrale prise suivant une partie du contour de la feuille par

$$\int_{\alpha}^{\beta} H(A),$$

où α est l'indice de la racine avec laquelle l'intégration a commencé, β l'indice de la racine avec laquelle l'intégration a été terminée, A l'indice de la feuille où l'intégration a eu lieu. Enfin l'intégrale prise suivant un lacet quelconque, nous la désignerons ainsi

$$\alpha\beta(A),$$

où α, β, A ont la signification indiquée ci-dessus. Admettant ces significations, supposons que nous avons, par exemple, cinq feuilles, et les coupures sont faites dans l'ordre suivant

$$a(I, II), \quad b(I, III), \quad c(II, IV), \quad d(II, V).$$

Posons encore que le lacet a permute les racines γ_i, γ_x , le lacet (b) permute les racines γ_e, γ_m , le lacet (c) permute les racines γ_n, γ_p , enfin le lacet (d) permute les racines γ_q, γ_r . Le premier tour donne pour l'intégrale la signification

$$(1) \quad \int_1^i H(I) + \int_i^n H(II) + \int_n^4 H(IV).$$

Le deuxième tour donne

$$(2) \quad \int_4^p H(IV) + \int_p^q H(II) + \int_q^5 H(V).$$

Le troisième tour donne

$$(3) \quad \int_5^r H(V) + \int_r^2 H(II).$$

Le quatrième tour donne

$$(4) \quad \int_2^k H(II) + \int_k^l H(I) + \int_l^3 H(III).$$

Enfin le cinquième tour donne

$$(5) \quad \int_3^m H(III) + \int_m^1 H(I).$$

En ajoutant (1), (2), (3), (4), (5), nous aurons

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= \overset{i}{\underset{1}{H}}(I) + \overset{n}{\underset{i}{H}}(II) + \overset{4}{\underset{n}{H}}(IV) + \overset{p}{\underset{4}{H}}(IV) \\ &+ \overset{q}{\underset{p}{H}}(II) + \overset{5}{\underset{q}{H}}(V) + \overset{r}{\underset{5}{H}}(V) + \overset{2}{\underset{r}{H}}(II) \\ &+ \overset{k}{\underset{2}{H}}(II) + \overset{l}{\underset{k}{H}}(I) + \overset{3}{\underset{l}{H}}(III) + \overset{m}{\underset{3}{H}}(III) + \overset{i}{\underset{m}{H}}(I) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= \overset{i}{\underset{i}{H}}(I) + ik(I) + ki(II) \\ &+ \overset{n}{\underset{i}{H}}(II) + np(II) + pn(IV) \\ &+ \left[\overset{4}{\underset{n}{H}}(IV) + \overset{p}{\underset{4}{H}}(IV) + pn(IV) \right] \\ &+ np(II) + \overset{q}{\underset{p}{H}}(II) + qr(II) \\ &+ \left[rq(V) + \overset{5}{\underset{q}{H}}(V) + \overset{r}{\underset{5}{H}}(V) \right] \\ &+ rq(V) + qr(II) + \overset{2}{\underset{r}{H}}(II) + \overset{k}{\underset{2}{H}}(II) \\ &+ ki(II) + ik(I) + \overset{l}{\underset{k}{H}}(I) + lm(I) \\ &+ \left[ml(III) + \overset{3}{\underset{l}{H}}(III) + \overset{m}{\underset{3}{H}}(III) \right] \\ &+ ml(III) + lm(I) + \overset{i}{\underset{m}{H}}(I). \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\overset{4}{\underset{n}{H}}(IV) + \overset{p}{\underset{4}{H}}(IV) + pn(IV) = H(IV) = 0,$$

$$rq(V) + \overset{5}{\underset{q}{H}}(V) + \overset{r}{\underset{5}{H}}(V) = H(V) = 0,$$

$$ml(III) + \overset{3}{\underset{l}{H}}(III) + \overset{m}{\underset{3}{H}}(III) = H(III) = 0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= \overset{i}{\underset{i}{H}}(I) + ik(I) \\ &+ \left[ki(II) + \overset{n}{\underset{i}{H}}(II) + np(II) \right. \\ &\quad \left. + \overset{q}{\underset{p}{H}}(II) + qr(II) + \overset{2}{\underset{r}{H}}(II) + \overset{k}{\underset{2}{H}}(II) \right] \\ &+ \overset{l}{\underset{k}{H}}(I) + lm(I) + \overset{i}{\underset{m}{H}}(I). \end{aligned}$$

En remarquant que

$$ki(\text{II}) + \overset{n}{\underset{i}{H}}(\text{II}) + np(\text{II}) + \overset{q}{\underset{p}{H}}(\text{II}) \\ + qr(\text{II}) + \overset{2}{\underset{r}{H}}(\text{II}) + \overset{k}{\underset{2}{H}}(\text{II}) = H(\text{II}) = 0.$$

nous aurons

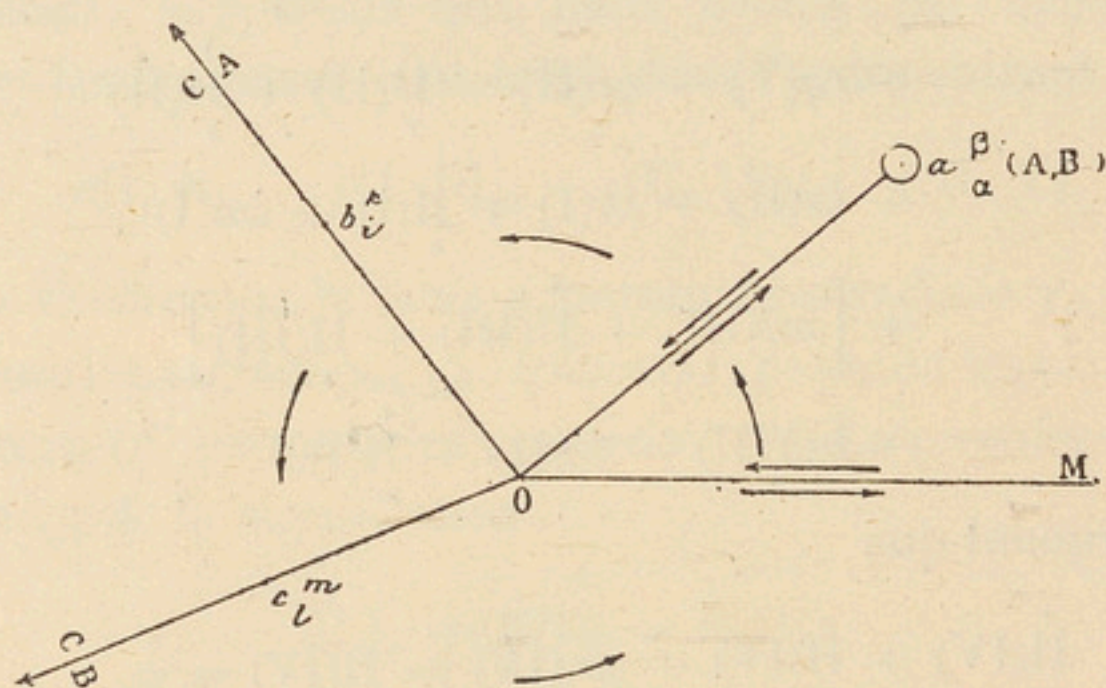
$$\int u dv = \overset{i}{\underset{1}{H}}(\text{I}) + ik(\text{I}) + \overset{l}{\underset{k}{H}}(\text{I}) \\ + lm(\text{I}) + \overset{1}{\underset{m}{H}}(\text{I}) = H(\text{I}) = 0,$$

C. Q. F. D.

II

Les deux théorèmes prouvés donnent la possibilité de trouver un lien entre les périodes des deux intégrales abéliennes indépendantes

Fig. 3.



de première espèce. Posons que, moyennant les coupures, le passage continu d'une feuille à une autre est garanti d'après le théorème premier; l'intégrale

$$\int u dv.$$

suivant le chemin indiqué, est égale à zéro. Considérons un point critique quelconque a permutant deux racines $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$; soit le lacet

$$(a)_\alpha^\beta$$

appartenant, par l'indice α , à la feuille A et par l'indice β à la feuille B, ce qui est indiqué sur la fig. 3.

Posons que, pour le passage de la feuille A à la feuille B, existent deux coupures : l'une, par le point critique b_i^k , donnant le passage de la feuille A à la feuille C, et la seconde, par le point critique c_i^m , donnant le passage de la feuille C à la feuille B.

Posons qu'en effectuant l'intégration, nous ayons déjà passé dans la feuille A et ensuite dans la feuille B. Au moment où nous arriverons à l'origine des coordonnées avec la racine γ_A , l'intégrale u a une certaine signification déterminée ; désignons-la par Q . Alors, décrivant l'angle MOa dans la feuille A, nous arriverons à l'origine des coordonnées ayant la signification

$$u = Q + \overset{\alpha}{H}_A(A).$$

Après le passage du lacet

$$(a)_\alpha^3$$

par la variable complexe, l'intégrale

$$\int u d\vartheta$$

acquerra la valeur

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^a \left[Q + \overset{\alpha}{H}_A(A) + u_\alpha \right] d\vartheta_\alpha - \int_0^a \left[Q + \overset{\alpha}{H}_A(A) + \alpha\beta(A) + u_\beta \right] d\vartheta_\beta \\ & = \left[Q + \overset{\alpha}{H}_A(A) \right] \int_0^a d\vartheta_\alpha - \left[Q + \overset{\alpha}{H}_A(A) + \alpha\beta(A) \right] \int_0^a d\vartheta_\beta \\ & \quad + \int_0^a u_\alpha d\vartheta_\alpha - \int_0^a u_\beta d\vartheta_\beta ; \end{aligned} \right.$$

ou, désignant

$$\int_0^a d\vartheta_\alpha = L_\alpha^a, \quad \int_0^a d\vartheta_\beta = L_\beta^a,$$

nous aurons pour (6) l'expression

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[Q + \overset{\alpha}{H}_A(A) \right] (L_\alpha^a - L_\beta^a) \\ & - \alpha\beta(A) L_\beta^a + \int_0^a u_\alpha d\vartheta_\alpha - \int_0^a u_\beta d\vartheta_\beta. \end{aligned} \right.$$

Pour le même point critique dans la feuille B, nous trouverons

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \left[Q + \overset{\alpha}{H}_A(A) + \alpha\beta(A) + \overset{i}{H}_\beta(A) + \overset{l}{H}_i(C) + \overset{B}{H}_l(B) \right] \\ & \times (L_\beta^a - L_\alpha^a) - \beta\alpha(B)L_\beta^a + \int_0^a u_\beta \partial \nu_\beta - \int_0^a u_\alpha \partial \nu_\alpha, \end{aligned} \right.$$

et comme le lacet

$$(a)_\alpha^\beta(A, B)$$

n'appartient qu'aux deux feuilles A et B, la partie de l'intégrale

$$\int u \partial \nu$$

correspondant à un seul point critique sera exprimée par la somme (7), (8) et, par conséquent, sera égale à

$$\begin{aligned} & \left[\alpha\beta(A) + \overset{i}{H}_\beta(A) + \overset{l}{H}_i(C) + \overset{B}{H}_l(B) + \overset{\beta}{H}_B(B) \right] \\ & \times (L_\beta^a - L_\alpha^a) - \alpha\beta(A) (L_\beta^a - L_\alpha^a). \end{aligned}$$

ou

$$\left[\overset{i}{H}_\beta(A) + \overset{l}{H}_i(C) + \overset{B}{H}_l(B) + \overset{\beta}{H}_B(B) \right] (L_\beta^a - L_\alpha^a).$$

La quantité

$$\overset{i}{H}_\beta(A) + \overset{l}{H}_i(C) + \overset{B}{H}_l(B) + \overset{\beta}{H}_B(B),$$

que nous désignerons par

$$\Omega_a,$$

formera la période. Désignons encore

$$L_\beta^a - L_\alpha^a = L_{\beta\alpha}^a;$$

alors la partie de l'intégrale

$$\int u \partial \nu,$$

correspondant à un seul point critique

$$a_\beta^\alpha(A, B),$$

s'exprimera par

$$\Omega_a L_{\beta x}^a.$$

Si nous désignons les points critiques, sans compter ceux par lesquels les coupures sont faites, par

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m,$$

alors

$$(9) \quad \int u dv = \sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i} L_{\beta_i x_i}^{a_i} = 0.$$

Maintenant il faut prendre soin que l'équation (9) ne contient que les périodes des deux intégrales u et v . Comme l'intégrale

$$\int dv$$

relativement au lacet

$$(a)_x^{\beta},$$

que nous avons désignée par $L_{\alpha\beta}^a$, désignons l'intégrale

$$\int du$$

relativement à ce même lacet par $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}^a$. Raisonnant relativement à l'intégrale

$$\int v du,$$

comme nous avons raisonné relativement à

$$\int u dv,$$

nous avons l'équation analogique

$$\sum_{i=1}^{i=m} E_{a_i} \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} = 0,$$

où E est formé des L comme Ω est formé des $\mathfrak{A}$; et par conséquent

$$\sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i} L_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} = \sum_{i=1}^{i=m} E_{a_i} \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} = 0.$$

Choisissons maintenant les lacets fondamentaux qui pourraient servir au passage de y_1 , à toutes les autres racines

$$y_2, y_3, \dots, y_\alpha, y_\beta, \dots, y_n,$$

et désignons par U_α la valeur de l'intégrale u , prise suivant les lacets fondamentaux unissant y_1 avec y_α ; soit V_α ayant la même signification pour l'intégrale v . Si nous posons

$$\Omega_{\alpha_i} = \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} + \mathfrak{A}_{\beta_i \gamma_i}^{b_i} + \dots + \mathfrak{A}_{\omega_i d_i}^{o_i},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha_i} = & [U_{x_i} + \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} - U_{\beta_i}] \\ & + [U_{\beta_i} + \mathfrak{A}_{\beta_i \gamma_i}^{b_i} - U_{\gamma_i}] + \dots [U_{\omega_i} + \mathfrak{A}_{\omega_i x_i} - U_{x_i}]; \end{aligned}$$

mais alors chaque quantité de la forme

$$\mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i},$$

donnera une période que nous désignerons ainsi

$$(\mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i}).$$

D'où il suit que la partie droite de l'équation (10) ne changera pas si, dans chaque quantité de la forme

$$E_{\alpha_i},$$

on substitue, à la place de

$$L_{x_i \beta_i}^{a_i},$$

la période

$$V_{\alpha_i} + L_{x_i \beta_i}^{a_i} - V_{\beta_i} = (L_{\alpha_i \beta_i}^{a_i}),$$

et, par conséquent, la partie gauche de la même équation ne changera pas à la suite d'une telle substitution, et nous aurons l'équation (9) dans la forme

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{\alpha_i} (L_{x_i \beta_i}^{a_i}) = 0,$$

équation donnant le lien entre les périodes.

Si nous désignons par N le nombre des points critiques de l'équation

$$f(x, y) = 0$$

et par n le nombre de ses racines, nous aurons $(n - 1)$ lacets fondamentaux; de même le nombre des coupures sera $(n - 1)$.

Comme les périodes (L) qui ne contiennent que les lacets fondamentaux sont égales à zéro, le nombre de toutes les périodes de l'intégrale abélienne sera

$$2p = N - 2(n - 1) = m.$$

L'application des théorèmes démontrés aux intégrales hyperelliptiques est surtout intéressante. Prenons deux intégrales hyperelliptiques indépendantes

$$u = \int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad v = \int \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où

$$R(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2p})(x - a_{2p+1})(x - a_{2p+2}),$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions entières dont les degrés ne surpassent pas $(p - 1)$. Posons que les points critiques sont disposés sur le plan dans l'ordre marqué par leurs numéros.

L'équation

$$y^2 = R(x)$$

a seulement deux racines et, par conséquent, il y a deux feuilles; chaque point critique appartient à deux feuilles et, par conséquent, il suffit de faire une coupure qu'il faut tracer de l'origine des coordonnées par un point critique quelconque; menons la coupure Oa_{2p+2} ; il faudra faire deux tours. Le premier tour donnera, pour le point critique a_1 :

$$\int_0^{a_1} u dv + \int_0^{a_1} (2A_1 - u) dv = 2A_1 B_1;$$

pour le point a_2 ,

$$\begin{aligned} & - \int_0^{a_2} (2A_1 - u) dv \\ & - \int_0^{a_2} (2A_1 - 2A_2 + u) dv = -4A_1 B_2 + 2A_2 B_2; \end{aligned}$$

pour le point a_3 ,

$$4(A_1 - A_2)B_3 + 2A_3 B_3;$$

En posant

$$\begin{aligned}
 2(A_1 - A_2) &= \omega_2, & 2(B_1 - B_2) &= \varepsilon_2, \\
 2(A_3 - A_4) &= \omega_4, & 2(B_3 - B_4) &= \varepsilon_4, \\
 &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\
 2(A_{2p-1} - A_{2p}) &= \omega_{2p}, & 2(B_{2p-1} - B_{2p}) &= \varepsilon_{2p}, \\
 2(A_2 - A_3 + \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) &= \omega_1, \\
 2(A_4 - A_5 + \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) &= \omega_3, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 2(A_{2p} - A_{2p+1}) &= \omega_{2p-1}, \\
 2(B_2 - B_3 + \dots + B_{2p} - B_{2p+1}) &= \varepsilon_1, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 2(B_{2p} - B_{2p+1}) &= \varepsilon_{2p-1},
 \end{aligned}$$

nous aurons

$$\sum_{i=1}^{i=p} (\omega_{2i-1} \varepsilon_{2i} - \varepsilon_{2i-1} \omega_{2i}) = 0.$$

Dans cette forme remarquable, on a presque immédiatement une relation entre les périodes de toutes les intégrales abéliennes de première espèce. Pour éviter les abstractions inutiles, analysons en détail l'exemple emprunté de l'Ouvrage de Clebsch et Gordan : *Theorie der abelschen Functionen*, 1886. Les discussions que nous offrirons possèdent la généralité nécessaire. Les points critiques sont disposés dans la direction positive dans l'ordre suivant

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{1,2}^1, & a_{2,3}^2, & a_{1,4}^3, & a_{2,4}^4, & a_{3,4}^5, & a_{1,3}^6, \\
 a_{2,4}^7, & a_{1,2}^8, & a_{2,3}^9, & a_{2,4}^{10}, & a_{3,4}^{11}, & a_{3,4}^{12}.
 \end{array}$$

Dans les lignes suivantes est présenté le rapport de chaque lacet à deux feuilles, les numéros des feuilles sont indiqués par les chiffres romains avec la condition que l'indice arabe de gauche corresponde au même indice romain. Ainsi nous avons

$$\begin{array}{cccc}
 a_{1,2}^1(\text{I, II}), & a_{2,3}^2(\text{III}), & a_{1,4}^3(\text{II, IV}), & a_{2,4}^4(\text{III, II}), \\
 a_{3,4}^5(\text{I, III}), & a_{1,3}^6(\text{IV, III}), & a_{2,4}^7(\text{II, I}), & a_{1,2}^8(\text{III, I}), \\
 a_{2,3}^9(\text{III, IV}), & a_{2,4}^{10}(\text{IV, II}), & a_{3,4}^{11}(\text{III, IV}), & a_{3,4}^{12}(\text{IV, III}),
 \end{array}$$

Les coupures sont faites à travers les points

$$a_{1,3}^6(\text{IV, III}), \quad a_{2,4}^7(\text{II, I}), \quad a_{1,2}^8(\text{III, I}).$$

Après la formule

$$\Omega_{a_i} L_{\beta, x_i}^{a_i} = \left[\overset{i}{\underset{\beta}{H}}(A) + \overset{l}{\underset{i}{H}}(C) + \overset{b}{\underset{l}{H}}(B) + \overset{\beta}{\underset{b}{H}}(B) \right] L_{\beta, x_i}^{a_i},$$

nous avons, pour le point $a_{1,2}^1(I, II)$,

$$(\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10}) L_{2,1}^1;$$

pour le point $a_{2,3}^2(I, III)$,

$$(\mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10} + \mathfrak{A}_{2,1}^1 + \mathfrak{A}_{1,4}^3 + \mathfrak{A}_{4,2}^4 + \mathfrak{A}_{2,3}^9 + \mathfrak{A}_{3,4}^{11} + \mathfrak{A}_{4,3}^{12}) L_{3,2}^2;$$

pour le point $a_{1,4}^3(II, IV)$,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{4,2}^4 + \mathfrak{A}_{2,3}^9 + \mathfrak{A}_{3,4}^{11} + \mathfrak{A}_{4,3}^{12} + \mathfrak{A}_{3,2}^2 \\ & \mathfrak{A}_{2,4}^4 + \mathfrak{A}_{4,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,2}^9 + \mathfrak{A}_{2,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,3}^{11} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12}) L_{4,1}^3 \\ & = (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10}) L_{1,4}^3; \end{aligned}$$

pour le point $a_{2,4}^4(III, II)$,

$$(\mathfrak{A}_{2,3}^9 + \mathfrak{A}_{3,4}^{11} + \mathfrak{A}_{4,3}^{12} + \mathfrak{A}_{3,2}^2) L_{2,4}^4;$$

pour le point $a_{3,4}^5(I, III)$,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{4,2}^{10} + \mathfrak{A}_{2,1}^1 + \mathfrak{A}_{1,4}^3 + \mathfrak{A}_{4,2}^4 + \mathfrak{A}_{2,4}^9 \\ & + \mathfrak{A}_{3,4}^{11} + \mathfrak{A}_{4,3}^{12} + \mathfrak{A}_{3,2}^2 + \mathfrak{A}_{2,4}^4) L_{4,3}^5; \end{aligned}$$

pour le point $a_{2,3}^9(III, IV)$,

$$(\mathfrak{A}_{3,4}^{11} + \mathfrak{A}_{4,3}^{12} + \mathfrak{A}_{3,2}^2 + \mathfrak{A}_{2,4}^4 + \mathfrak{A}_{4,3}^5) L_{3,2}^9;$$

pour le point $a_{4,2}^{10}(II, IV)$,

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{2,1}^1 + \mathfrak{A}_{1,4}^3 + \mathfrak{A}_{4,2}^4 + \mathfrak{A}_{2,3}^9 + \mathfrak{A}_{3,4}^{11} \\ & + \mathfrak{A}_{4,3}^{12} + \mathfrak{A}_{3,2}^2 + \mathfrak{A}_{2,4}^4 + \mathfrak{A}_{4,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,2}^9) L_{2,4}^{10} \\ & = (\mathfrak{A}_{2,1}^1 + \mathfrak{A}_{1,4}^3 + \mathfrak{A}_{3,4}^{11} + \mathfrak{A}_{4,3}^{12} + \mathfrak{A}_{3,2}^2 + \mathfrak{A}_{4,3}^5) L_{2,4}^{10}; \end{aligned}$$

pour le point $a_{3,4}^{11}(III, IV)$,

$$(\mathfrak{A}_{4,3}^{12} + \mathfrak{A}_{3,2}^2 + \mathfrak{A}_{2,4}^4 + \mathfrak{A}_{4,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,2}^9 + \mathfrak{A}_{2,4}^{10}) L_{4,3}^{11};$$

pour le point $a_{4,3}^{12}(III, IV)$,

$$(\mathfrak{A}_{3,2}^2 + \mathfrak{A}_{2,4}^4 + \mathfrak{A}_{4,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,2}^9 + \mathfrak{A}_{2,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,3}^{11}) L_{3,4}^{12}.$$

En posant que les lacets

$$a_{1,4}^3, \quad a_{4,2}^4, \quad a_{2,3}^9$$

sont des lacets fondamentaux, nous aurons

$$\mathfrak{A}_{1,4}^3 = \mathfrak{A}_{4,2}^4 = \mathfrak{A}_{2,3}^9 = L_{1,4}^3 = L_{4,2}^4 = L_{2,3}^9 = 0.$$

Nous aurons la relation entre les périodes dans la forme (11) :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10}) L_{2,1}^1 \\ & + (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{4,3}^5 + \mathfrak{A}_{2,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,3}^{11} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12}) L_{2,3}^2 \\ & + (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{2,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,3}^{11} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12}) L_{3,4}^5 \\ & + (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,3}^{11} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12}) L_{4,2}^{10} \\ & + (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12}) L_{3,4}^{11} \\ & + (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10} + \mathfrak{A}_{3,4}^{11}) L_{4,3}^{12} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'expression (13) est symétrique par rapport à $\mathfrak{A}$ et L . Les deux premières lignes contiennent les deux membres symétriques

$$\mathfrak{A}_{2,3}^2 L_{2,1}^1, \quad \mathfrak{A}_{1,2}^1 L_{2,3}^2;$$

par conséquent, prenons les deux premières lignes pour le point de départ de notre transformation et formons le binôme symétrique

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{4,3}^5 + \mathfrak{A}_{2,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,3}^{11} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12}) (L_{2,3}^2 + L_{3,4}^5 + L_{4,2}^{10}) \\ & - (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10}) \\ & \times (L_{1,2}^1 + L_{4,3}^5 + L_{2,4}^{10} + L_{4,3}^{11} + L_{3,4}^{12}) \\ & = \omega_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \omega_2. \end{aligned} \right.$$

Faisons la soustraction (13), (14); nous aurons évidemment pour résultat une fonction symétrique semblable et, avec cela, le nombre des lignes sera diminué de deux unités. Ainsi nous avons pour reste

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_{2,4}^{10} L_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{3,4}^{12} L_{4,2}^{10} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12} L_{3,4}^{11} + \mathfrak{A}_{3,4}^{11} L_{4,3}^{12} \\ & = (\mathfrak{A}_{2,4}^{10} L_{3,4}^5 - \mathfrak{A}_{3,4}^5 L_{2,4}^{10}) + (\mathfrak{A}_{3,4}^{12} L_{3,4}^{11} - \mathfrak{A}_{3,4}^{11} L_{3,4}^{12}). \end{aligned}$$

Nous avons, par conséquent, la relation entre les périodes dans la forme suivante :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & [(\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{4,3}^5 + \mathfrak{A}_{2,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,3}^{11} + \mathfrak{A}_{3,4}^{12}) \\ & \times (L_{2,3}^2 + L_{3,4}^5 + L_{4,2}^{10}) - (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^5 + \mathfrak{A}_{4,2}^{10}) \\ & \times (L_{1,2}^1 + L_{4,3}^5 + L_{2,4}^{10} + L_{4,3}^{11} + L_{3,4}^{12})] \\ & + [\mathfrak{A}_{2,4}^{10} L_{3,4}^5 - \mathfrak{A}_{3,4}^5 L_{2,4}^{10}] + [\mathfrak{A}_{3,4}^{12} L_{3,4}^{11} - \mathfrak{A}_{3,4}^{11} L_{3,4}^{12}] = 0. \end{aligned} \right.$$

Les périodes normales sont

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{43}^5 + \mathfrak{A}_{24}^{10} + \mathfrak{A}_{43}^{11} + \mathfrak{A}_{34}^{12}, \\
 \omega_2 &= \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10}, \\
 \omega_3 &= \mathfrak{A}_{24}^{10}, \\
 \omega_4 &= \mathfrak{A}_{34}^5, \\
 \omega_5 &= \mathfrak{A}_{34}^{12}, \\
 \omega_6 &= \mathfrak{A}_{34}^{11}; \\
 \varepsilon_1 &= L_{12}^1 + L_{43}^5 L_{24}^{10} + L_{43}^{11} + L_{34}^{12}, \\
 \varepsilon_2 &= L_{23}^2 + L_{34}^5 + L_{42}^{10}, \\
 \varepsilon_3 &= L_{24}^{10}, \\
 \varepsilon_4 &= L_{34}^5, \\
 \varepsilon_5 &= L_{34}^{12}, \\
 \varepsilon_6 &= L_{34}^{11}.
 \end{aligned}$$

Il est facile de prouver que chacune des périodes (13) s'exprimera par une fonction entière et linéaire des périodes normales avec les coefficients ± 1 . Nous avons évidemment

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{43}^5 + \mathfrak{A}_{24}^{10} + \mathfrak{A}_{43}^{11} + \mathfrak{A}_{34}^{12} &= \omega_1, \\
 \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} &= \omega_2, \\
 \mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^{10} + \mathfrak{A}_{43}^{11} + \mathfrak{A}_{34}^{12} &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\
 \mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{43}^{11} + \mathfrak{A}_{34}^{12} &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_4, \\
 \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{12} &= \omega_2 + \omega_5, \\
 \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{11} &= \omega_2 + \omega_6.
 \end{aligned}$$

On peut former aussi les périodes normales par d'autres moyens. Par exemple, posons

$$\begin{aligned}
 &(\mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{12})(L_{23}^2 + L_{34}^5 + L_{42}^{10} + L_{34}^{11}) \\
 &\quad - (\mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{11})(L_{23}^2 + L_{34}^5 + L_{42}^{10} + L_{34}^{12}) \\
 &= \omega_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \omega_2.
 \end{aligned}$$

En faisant la soustraction de ce binôme de (13), nous aurons à la place de six lignes seulement quatre :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10})L_{21}^1 \\ &+ (\mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{24}^{10})L_{23}^2 \\ &+ (\mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5)L_{42}^{10} \\ &+ (\mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^{10})L_{34}^5. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{43}^5 + \mathfrak{A}_{24}^{10}) (L_{23}^2 + L_{34}^5 + L_{42}^{10}) \\ & - (\mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10}) (L_{12}^1 + L_{43}^5 + L_{24}^{10}) = \omega_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_3 \omega_4. \end{aligned}$$

En faisant la soustraction de ce binôme de (16), nous aurons

$$E_{34}^{50} L_{42}^{10} - E_{42}^{10} L_{34}^{50} = \omega_5 \varepsilon_6 - \varepsilon_5 \omega_6,$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \mathfrak{A}_{23}^{12} + \mathfrak{A}_{34}^{5} + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{12}, \\ \omega_2 &= \mathfrak{A}_{23}^{12} + \mathfrak{A}_{34}^{5} + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{11}, \\ \omega_3 &= \mathfrak{A}_{12}^{1} + \mathfrak{A}_{43}^{5} + \mathfrak{A}_{24}^{10}, \\ \omega_4 &= \mathfrak{A}_{23}^{12} + \mathfrak{A}_{34}^{5} + \mathfrak{A}_{42}^{10}, \\ \omega_5 &= \mathfrak{A}_{34}^{5}, \\ \omega_6 &= \mathfrak{A}_{42}^{10}.\end{aligned}$$

Les périodes (13) s'exprimeront au moyen des périodes normales, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} = \omega_4, \\ & \mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{43}^5 + \mathfrak{A}_{24}^{10} + \mathfrak{A}_{43}^{11} + \mathfrak{A}_{34}^{12} = -\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ & \mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^{10} + \mathfrak{A}_{43}^{11} + \mathfrak{A}_{34}^{12} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_6, \\ & \mathfrak{A}_{12}^1 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{43}^{11} + \mathfrak{A}_{34}^{12} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5, \\ & \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{12} = \omega_1, \\ & \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{34}^5 + \mathfrak{A}_{42}^{10} + \mathfrak{A}_{34}^{11} = \omega_2. \end{aligned}$$

La propriété des périodes obtenues à l'intégration immédiate de s'exprimer par une fonction entière et linéaire des périodes normales avec les coefficients ± 1 peut être prouvée, en général, de la manière suivante. Effectivement, après l'intégration, nous aurons une relation entre les périodes à laquelle nous pouvons donner la forme suivante :

[illegible]

où les lettres a et b marquent les périodes des intégrales qui contiennent des cycles simples. Pour former la première paire des

**SUR LES INTÉGRALES
PSEUDO-ELLIPTIQUES QUI DÉPENDENT
D'UNE RACINE CUBIQUE
D'UN POLYNÔME DU TROISIÈME DEGRÉ**

(*Bulletin des Sciences Mathématiques de Darboux*, Tannery.
2^e série, XVII, t. 1893, p. 125-138)

1. Proposons-nous d'étudier les propriétés de l'intégrale

$$A = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}.$$

Nous exprimerons d'abord cette intégrale par des fonctions elliptiques de Weierstrass; pour cet effet, nous posons

$$x - a = \frac{1}{u};$$

alors

$$A = -\sqrt[3]{a'b'} \int \frac{du}{u \sqrt[3]{(u-a')(u-b')}},$$

$$a' = \frac{1}{b-a}, \quad b' = \frac{1}{c-a}$$

ou

$$A = -\sqrt[3]{a'b'} \int \frac{\sqrt[3]{(u-a')(u-b')}}{u} \frac{du}{\sqrt[3]{(u-a')^2(u-b')^2}}.$$

Posons

$$(1) \quad \left(\frac{du}{dz}\right)^3 = (u-a')^2(u-b')^2.$$

Déterminons maintenant la fonction u par cette équation différentielle (1) et par la condition que u a son infini pour

$$z = 0.$$

Il est bien connu que l'équation (1) a une intégrale doublement périodique et monodrome ⁽¹⁾. Si l'on pose

$$u = Mp^{(n)}z + \varphi(z),$$

il est très facile de prouver que $n = 1$ et $\varphi(z)$ est une quantité numérique constante ; il nous reste à poser

$$u = Mp'z + N.$$

En substituant à (1), nous aurons

$$M^3(p'z)^3 = (Mp'z + N - a')^2 (Mp'z + N - b')^2.$$

De cette égalité, il découle

$$N = \frac{a' + b'}{2}, \quad M = \frac{27}{2},$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\left(\frac{a' - b'}{27}\right)^2,$$

$$u = \frac{27}{2} p'z + \frac{a' + b'}{2},$$

$$p'z = \sqrt[3]{4p^3z + \frac{a' - b'}{27}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt[3]{(u - a')^2 (u - b')^2} = \frac{27}{2} p''z = 81p^2z,$$

donc

$$\sqrt[3]{(u - a') (u - b')} = 9pz;$$

par conséquent

$$A = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{a'b'} \int \frac{pz \partial z}{p'z + \frac{a' + b'}{27}}.$$

Maintenant, il faut réduire la fonction intégrée à la forme intégrable. Nous aurons

$$A = -\frac{1}{6} \sqrt[3]{a'b'} \int \frac{pz \left(p'z - \frac{a' + b'}{27} \right) \partial z}{p^3z - \frac{a'b'}{3^6}}.$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{1}{9} \sqrt[3]{a'b'} = h$$

⁽¹⁾ C. JORDAN. *Cours d'Analyse*, t. III, 1887.

et en décomposant la fraction

$$\frac{pz}{p^3z - h^3}$$

à ces simples termes, nous obtiendrons

$$A = - \frac{1}{2} \int \left(\frac{p'z}{pz - h} + \frac{\alpha^2 p'z}{pz - \alpha h} + \frac{\alpha p'z}{pz - \alpha^2 h} \right) dz \\ + \frac{a' + b'}{2 \cdot 3^3} \int \left(\frac{1}{pz - h} + \frac{\alpha^2}{pz - \alpha h} + \frac{\alpha}{pz - \alpha^2 h} \right) dz$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'équation

$$\alpha^3 - 1 = 0.$$

La première intégrale s'exprime immédiatement par des logarithmes, et nous aurons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= - \frac{1}{2} \log [(pz - h)(pz - \alpha h)^{\alpha^2}(pz - \alpha^2 h)^{\alpha}] \\ &+ \frac{a' + b'}{2 \cdot 3^3} \int \left(\frac{1}{pz - h} + \frac{\alpha^2}{pz - \alpha h} + \frac{\alpha}{pz - \alpha^2 h} \right) dz. \end{aligned} \right.$$

Pour calculer l'intégrale

$$B = \frac{a' + b'}{2 \cdot 3^3} \int \left(\frac{1}{pz - h} + \frac{\alpha^2}{pz - \alpha h} + \frac{\alpha}{pz - \alpha^2 h} \right) dz,$$

posons

$$h = pz_0.$$

D'après les formules, bien connues, d'homogénéité

$$\begin{aligned} p'(\alpha z_0, 0, g_3) &= \alpha p'(z_0, 0, g_3), \\ p'(\alpha^2 z_0, 0, g_3) &= p'(z_0, 0, g_3), \\ \zeta(\alpha z_0, 0, g_3) &= \alpha^2 \zeta(z_0, 0, g_3), \\ p(\alpha^2 z_0, 0, g_3) &= \alpha^2 p(z_0, 0, g_3), \\ p'(\alpha^2 z_0, 0, g_3) &= p'(z_0, 0, g_3), \\ \zeta(\alpha^2 z_0, 0, g_3) &= \alpha \zeta(z_0, 0, g_3). \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} &\frac{1}{pz - pz_0} + \frac{\alpha^2}{pz - p\alpha z_0} + \frac{\alpha}{pz - p\alpha^2 z_0} \\ &= \frac{1}{p'z_0} \{ [\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0)] \\ &\quad + \alpha^2 [\zeta(z - \alpha z_0) - \zeta(z + \alpha z_0)] + \alpha [\zeta(z - \alpha^2 z_0) - \zeta(z + \alpha^2 z_0)] \}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$p'z_0 = \sqrt[3]{4h^3 + \left(\frac{a' - b'}{27}\right)^2} = \frac{a' + b'}{27}.$$

Par cette raison

$$B = \frac{1}{2} \log \left\{ \left[\frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \right] \left[\frac{\sigma(z - \alpha z_0)}{\sigma(z + \alpha z_0)} \right]^{\alpha^2} \left[\frac{\sigma(z - \alpha^2 z_0)}{\sigma(z + \alpha^2 z_0)} \right]^{\alpha} \right\},$$

donc

$$(3) \quad \left\{ \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x - a)(x - b)(x - c)}} \right. \\ \left. = -\log \left\{ \left[\frac{\sigma(z + z_0)}{\sigma z} \right] \left[\frac{\sigma(z + \alpha z_0)}{\sigma z} \right]^{\alpha^2} \left[\frac{\sigma(z + \alpha^2 z_0)}{\sigma z} \right]^{\alpha} \right\} \right\}.$$

Nous aurons aussi évidemment

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x - a)(x - b)(x - c)}} \\ = -\frac{1}{m} \log \left\{ \left[e^{-\frac{2\tilde{\tau}_1 z}{m}} \frac{\sigma(z + z_0)}{\sigma z} \right]^m \right. \\ \left. \times \left[e^{-\frac{2\alpha^2 \tilde{\tau}_1 z}{m}} \frac{\sigma(z + \alpha z_0)}{\sigma z} \right]^{m\alpha^2} \left[e^{-\frac{2\alpha \tilde{\tau}_1 z}{m}} \frac{\sigma(z + \alpha^2 z_0)}{\sigma z} \right]^{m\alpha} \right\}.$$

Si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}$, c'est-à-dire, si z_0 est une partie commensurable d'une période, les trois fonctions

$$\left[e^{-\frac{2\tilde{\tau}_1 z}{m}} \frac{\sigma(z + z_0)}{\sigma z} \right]^m, \quad \left[e^{-\frac{2\alpha^2 \tilde{\tau}_1 z}{m}} \frac{\sigma(z + \alpha z_0)}{\sigma z} \right]^m, \quad \left[e^{-\frac{2\alpha \tilde{\tau}_1 z}{m}} \frac{\sigma(z + \alpha^2 z_0)}{\sigma z} \right]^m$$

sont exprimables rationnellement par pz et $p'z$; donc nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant donné*

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\frac{1}{3^6} \frac{(b - c)^2}{(a - b)^2 (a - c)^2},$$

$$pz_0 = \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(a - b)(a - c)}};$$

si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x - a)(x - b)(x - c)}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Les deux cas d'intégrabilité par des logarithmes sont bien connus.

1. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^3 - p^2 x}}.$$

Ici nous aurons

$$a = 0, \quad b = p, \quad c = -p,$$

$$a' = \frac{1}{p}, \quad b' = -\frac{1}{p},$$

$$\frac{a' + b'}{27} = p' z_0 = 0;$$

donc

$$z_0 = \tilde{\omega}$$

est une demi-période.

2. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^3 + a}},$$

ou ce qui est égal, mais plus simple au point de vue du calcul,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

Ici nous avons

$$p z_0 = \frac{1}{27} \sqrt[3]{9},$$

$$p' z_0 = -\frac{1}{27}, \quad p'' z_0 = \frac{2}{81} \sqrt[3]{3}.$$

Nous avons la formule de duplication de l'argument

$$p(2z_0) = -2p z_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{p'' z_0}{p' z_0} \right)^2,$$

donc

$$p(2z_0) = -\frac{2}{27} \sqrt[3]{9} + \frac{1}{9} \sqrt[3]{9} = \frac{1}{27} \sqrt[3]{9};$$

donc

$$p(2z_0) = p z_0,$$

par conséquent

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{3}.$$

3. Retournons maintenant à la formule générale (3)

$$(4) \quad \begin{cases} A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}} \\ = -\log \{ [\sigma(z+z_0)] [\sigma'(z+\alpha z_0)]^{\alpha^2} [\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha} \}. \end{cases}$$

Par la réduction convenable, il est facile d'évaluer cette intégrale. En effet, nous avons les trois égalités

$$(5) \quad \begin{cases} -\frac{\sigma(z-kz_0)\sigma[z-(k+2)z_0]}{\sigma^2[z-(k+1)z_0]\sigma^2(z_0)} = p[z-(k+1)z_0] - pz_0, \\ -\frac{\sigma(z-k\alpha z_0)\sigma[z-(k+2)\alpha z_0]}{\sigma^2[z-(k+1)\alpha z_0]\sigma^2(\alpha z_0)} = p[z-(k+1)\alpha z_0] - p(\alpha z_0), \\ -\frac{\sigma(z-k\alpha^2 z_0)\sigma[z-(k+2)\alpha^2 z_0]}{\sigma^2[z-(k+1)\alpha^2 z_0]\sigma^2(\alpha^2 z_0)} = p[z-(k+1)\alpha^2 z_0] - p(\alpha^2 z_0). \end{cases}$$

Nommons encore, pour abréger,

$$\begin{aligned} \log \{ \sigma(z-kz_0)[\sigma(z-k\alpha z_0)]^{\alpha^2} [\sigma(z-k\alpha^2 z_0)]^{\alpha} \} &= S_k, \\ \log \{ [p(z-kz_0) - pz_0] \\ &\times [p(z-k\alpha z_0) - p\alpha z_0]^{\alpha^2} [p(z-k\alpha^2 z_0) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha} \} = P_k, \end{aligned}$$

où k est un nombre entier, positif ou négatif. Des égalités (5), nous aurons évidemment

$$S_k + S_{k+2} - 2S_{k+1} = P_{k+1} \quad (1).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} -A + S_1 - 2S_0 &= P_0, \\ S_1 + S_3 - 2S_2 &= P_2, \\ S_2 + S_4 - 2S_3 &= P_3, \\ S_3 + S_5 - 2S_4 &= P_4, \\ &\dots\dots\dots \\ S_{m-1} + S_{m+1} - 2S_m &= P_m, \\ S_0 &= \log [(\sigma z)(\sigma' z)^{\alpha^2} (\sigma z)^{\alpha}] = 0. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations respectivement par 1, -1, -2, -3, ..., -(m-1), puis en ajoutant les résultats, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \log \{ [\sigma(z+z_0)] [\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha^2} [\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha} \} \\ = P_0 - P_2 - 2P_3 - \dots - (m-1)P_m + (m-1)S_{m+1} - 2(m-1)S_m. \end{aligned}$$

(1) En négligeant toujours la quantité constante.

Posons maintenant

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

alors

$$S_m = \log \left\{ \left[\frac{\sigma(z - 2\tilde{\omega})}{\sigma z} \right] \left[\frac{\sigma(z - 2\alpha\tilde{\omega})}{\sigma z} \right]^{\alpha^2} \left[\frac{\sigma(z - 2\alpha^2\tilde{\omega})}{\sigma z} \right]^{\alpha} \right\} = 0,$$

$$S_{m+1} = \log \left\{ [\sigma(z - z_0 - 2\tilde{\omega})] \right. \\ \left. \times [\sigma(z - \alpha z_0 - 2\alpha\tilde{\omega})]^{\alpha^2} [\sigma(z - \alpha^2 z_0 - 2\alpha^2\tilde{\omega})]^{\alpha} \right\} = S_1,$$

ou

$$S_{m+1} = P_0 - \log \left\{ [\sigma(z + z_0)] [\sigma(z + \alpha z_0)]^{\alpha^2} [\sigma(z + \alpha^2 z_0)]^{\alpha} \right\}.$$

Par conséquent

$$-A = \frac{1}{m} [P_0 - P_2 - 2P_3 - \dots - (m-2)P_{m-1} - (m-1)P_m + (m-1)P_0].$$

En remarquant que

$$P_m = \log \left\{ [p(z - 2\tilde{\omega}) - pz_0] \right. \\ \left. \times [p(z - 2\alpha\tilde{\omega}) - p\alpha z_0]^{\alpha^2} [p(z - 2\alpha^2\tilde{\omega}) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha} \right\} = P_0,$$

nous aurons définitivement

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}} \\ &= \frac{1}{m} \log \prod_{i=0}^{i=m-1} \left\{ [p(z - iz_0) - pz_0] [p(z - i\alpha z_0) - p\alpha z_0]^{\alpha^2} \right. \\ & \quad \left. \times [p(z - i\alpha^2 z_0) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha} \right\}^{i-1}. \end{aligned} \right.$$

De cette formule générale on peut obtenir, avec une grande facilité, la forme définitive des exemples classiques (n° 2). En remarquant que

$$pz = \frac{1}{9} \sqrt[3]{(u-a')(u-b')} \quad (\text{n° 1}),$$

nous aurons

$$pz = \frac{h}{x-a} \sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Par conséquent

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - px}} \\ = -\frac{1}{2} \log \left[(x - \sqrt[3]{x^3 - px}) (x - \alpha \sqrt[3]{x^3 - px})^{\alpha^2} (x - \alpha^2 \sqrt[3]{x^3 - px})^{\alpha} \right].$$

Nous avons aussi

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^3 - px}} \\ = -\frac{1}{2} \log \left[\left(x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{x^2 - p} \right) \left(x^{\frac{2}{3}} - \alpha \sqrt[3]{x^2 - p} \right)^{\alpha^2} \left(x^{\frac{2}{3}} - \alpha^2 \sqrt[3]{x^2 - p} \right)^{\alpha} \right].$$

Posons

$$x^2 = z^3, \quad \partial x = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} \partial z,$$

alors

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^3 - p}} \\ = -\frac{1}{3} \log \left[\left(z - \sqrt[3]{z^3 - p} \right) \left(z - \alpha \sqrt[3]{z^3 - p} \right)^{\alpha^2} \left(z - \alpha^2 \sqrt[3]{z^3 - p} \right)^{\alpha} \right].$$

4. La question sur laquelle nous voulons attirer l'attention est la suivante : chercher les conditions nécessaires et suffisantes d'après lesquelles il est possible de choisir la quantité indéterminée H de telle sorte que l'intégrale

$$B = \int \frac{(x + H) \partial x}{\sqrt[3]{(x - a)^2 (x - b)^2 (x - c)^2}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. Cette question présente une analogie évidente avec le problème connu de M. Tchébycheff concernant l'intégration des différentielles

$$\int \frac{(x + H) \partial x}{\sqrt[3]{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}} \quad (1).$$

En exprimant l'intégrale B par des fonctions elliptiques, nous aurons évidemment

$$B = -\sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + H) z - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} \int \frac{\partial z}{\frac{27}{2} p' z + \frac{a' + b'}{2}}.$$

(1) *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. III; 1861. *Journal de Mathématiques*, 1864.

ou

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &= [3\zeta z_0 - \sqrt[3]{a'^3 b'^2} (a + H)] z \\ & \quad - \frac{1}{2} \log [pz - pz_0] (pz - pz_0)^\alpha (pz - pz^2 z_0)^{\alpha^2} \\ & \quad + \frac{1}{2} \log \left\{ \left[\frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \right] \left[\frac{\sigma(z - \alpha z_0)}{\sigma(z + \alpha z_0)} \right]^\alpha \left[\frac{\sigma(z - \alpha^2 z_0)}{\sigma(z + \alpha^2 z_0)} \right]^{\alpha^2} \right\}, \end{aligned}$$

ou bien

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &= [3\zeta(z_0) - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + H)] z \\ & \quad - \log \{ [\sigma(z + z_0)] [\sigma(z + \alpha z_0)]^\alpha [\sigma(z + \alpha^2 z_0)]^{\alpha^2} \}. \end{aligned} \right.$$

Il est clair que nous avons encore

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &= \left[3\zeta(z_0) - 3 \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + H) \right] z \\ & \quad - \frac{1}{m} \log \left\{ \left[e^{-\frac{2\tilde{\eta}}{m} z} \frac{\sigma(z + z_0)}{\sigma z} \right]^m \right. \\ & \quad \times \left[e^{-\frac{2\alpha^2 \tilde{\eta}}{m} z} \frac{\sigma(z - \alpha z_0)}{\sigma z} \right]^{m\alpha} \left[e^{-\frac{2\alpha^2 \tilde{\eta}}{m} z} \frac{\sigma(z + \alpha^2 z_0)}{\sigma z} \right]^{m\alpha^2} \left. \right\}. \end{aligned}$$

En choisissant H sous la condition

$$3\zeta(z_0) - 3 \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + H) = 0,$$

nous exprimerons notre intégrale par des logarithmes. Donc nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — Étant donné

$$\begin{aligned} g_2 &= 0, & g_3 &= \frac{1}{3^6} \frac{(b-c)^2}{(a-b)^2(a-c)^2}, \\ pz_0 &= \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)(a-c)}}, \end{aligned}$$

si z_0 est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

s'exprime par des logarithmes; l'indéterminée H étant choisie sous la condition

$$3\zeta(z_0) - 3\frac{2\tilde{r}_1}{m} - \sqrt[3]{a'^2b'^2}(a + H) = 0.$$

5. Avant de passer au cas général, considérons les deux intégrales classiques.

1° Posons

$$z_0 = \tilde{\omega}, \quad \zeta(z_0) = \tilde{\eta}_1;$$

alors la formule (6) donne

$$H = -a,$$

et comme

$$p'z_0 = p'\tilde{\omega} = \frac{a' + b'}{27} = 0,$$

nous aurons

$$a = \frac{b + c}{2}.$$

Cette condition étant remplie, l'intégrale

$$\int \frac{(x-a)dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

s'exprime par des logarithmes, et nous avons

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x-a)dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \log [(pz - pz_0)(pz - p^2z_0)^2(pz - p^3z_0)^3]. \end{aligned}$$

2° Considérons l'intégrale

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}.$$

Dans ce cas

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{3}, \quad p'\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) = -\frac{1}{27}, \quad p''\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) = \frac{2}{81}\sqrt[3]{3}.$$

De la formule

$$\zeta(2u) = 2\zeta u + \frac{1}{2} \frac{p''u}{p'u},$$

il découle

$$\zeta\left(\frac{4\tilde{\omega}}{3}\right) = 2\zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) - \frac{1}{3} \sqrt[3]{3}$$

ou

$$3\zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) - 2\tilde{\tau}_1 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3}.$$

La formule (6) donne

$$\Pi = 0;$$

par conséquent l'intégrale

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Il est facile de constater que

$$\begin{aligned} & \int \frac{x \partial x}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \\ &= -\frac{1}{3} \log \left[(x - \sqrt[3]{x^3 - 1}) (x - \alpha \sqrt[3]{x^3 - 1})^\alpha (x - \alpha^2 \sqrt[3]{x^3 - 1})^{\alpha^2} \right]. \end{aligned}$$

6. Évaluons maintenant l'intégrale

$$\int \frac{(x + H) \partial x}{\sqrt[3]{(x - a)^2 (x - b)^2 (x - c)^2}},$$

dans tous les cas possibles, D'après la formule (5) il faut calculer la fonction

$$\log \left\{ [\sigma(z + z_0)] [\sigma(z + \alpha z_0)]^\alpha [\sigma(z + \alpha^2 z_0)]^{\alpha^2} \right\}.$$

Posons, pour abréger,

$$\log \left\{ [\sigma(z - kz_0)] [\sigma(z - \alpha kz_0)]^\alpha [\sigma(z - \alpha^2 kz_0)]^{\alpha^2} \right\} = S'_k.$$

$$\log \left\{ [p(z - kz_0) - pz_0] \right.$$

$$\left. \times [p(z - \alpha kz_0) - \alpha pz_0]^\alpha [p(z - \alpha^2 kz_0) - \alpha^2 pz_0]^{\alpha^2} \right\} = P'_k.$$

Alors nous obtiendrons, évidemment,

$$\begin{aligned} & \log \left\{ [\sigma(z + z_0)] [\sigma(z + \alpha z_0)]^\alpha [\sigma(z + \alpha^2 z_0)]^{\alpha^2} \right\} \\ &= P'_0 - P'_2 - 2P'_3 - \dots - (m-1)P'_m + (m-1)S'_{m+1} - mS'_m. \end{aligned}$$

En posant

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

nous aurons

$$S'_m = -6\tilde{\tau}_1 z,$$

$$S'_{m+1} = -6\tilde{\tau}_1 z + P'_0 - \log \left\{ [\sigma(z + z_0)] [\sigma(z + \alpha z_0)]^\alpha [\sigma(z + \alpha^2 z_0)]^{\alpha^2} \right\};$$

donc

$$\begin{aligned} & \log \left\{ [\sigma(z + z_0)] [\sigma(z + \alpha z_0)]^\alpha [\sigma(z + \alpha^2 z_0)]^{\alpha^2} \right\} \\ &= 3 \frac{2\tilde{\tau}_1}{m} z + P'_0 - P'_2 - 2P'_3 - \dots - (m-2)P'_{m-1} : \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x + \Pi) dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &= \left[3 \left(\zeta z_0 - \frac{2\tilde{\tau}_1}{m} \right) - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + \Pi) \right] z \\ &+ \frac{1}{m} [P'_2 + 2P'_3 + \dots + (m-2)P'_{m-1} - P'_0]. \end{aligned}$$

Enfin

$$(II) \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{(x - \Pi) dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &= \left\{ 3 \left[\zeta \left(\frac{2\tilde{\omega}}{m} \right) - \frac{2\tilde{\tau}_1}{m} \right] - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + \Pi) \right\} z \\ &+ \frac{1}{m} \log \prod_{i=0}^{m-1} \left\{ [p(z - iz_0) - pz_0] [p(z - i\alpha z_0) - p\alpha z_0]^\alpha \right. \\ &\quad \left. \times [p(z - i\alpha^2 z_0) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha^2} \right\}^{i-1}. \end{aligned} \right.$$

7. La même méthode est applicable aux intégrales pseudo-elliptiques d'Abel. Ces intégrales sont de la forme suivante

$$\int \frac{(x + \Pi) dx}{\sqrt[3]{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}}.$$

J'ai publié sur ce sujet un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. VI; 1890. Dans ce Mémoire je donne la formule

$$(8) \quad \int \frac{(x + \Pi) dx}{\sqrt[3]{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}} = \log \frac{\tau(u + v)}{\sigma u}.$$

Mais j'avais fait l'évaluation de cette intégrale d'après le principe de M. *Tchébycheff*. Cette méthode n'est pas pratique, parce que les résultats définitifs ne dépendent pas d'un seul radical fondamental

$$R = \sqrt{x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4},$$

mais d'une série d'autres radicaux qui sont obtenus de toute une suite de transformations successives. Ici j'ai l'intention de réduire la formule (8) à la forme analogue à celles des numéros précédents. En posant

$$\log \frac{\sigma(u - i\varphi)}{\sigma u} = S_i, \quad \log [p(u - i\varphi) - p\varphi] = P_i,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \log \frac{\sigma(u + \varphi)}{\sigma u} &= -S_1 + P_0, \\ S_1 + S_3 - 2S_2 &= P_2, \\ S_2 + S_4 - 2S_3 &= P_3, \\ &\dots\dots\dots \\ S_{m-1} + S_{m+1} - 2S_m &= P_m. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\log \frac{\sigma(u + \varphi)}{\sigma u} = P_0 - P_2 - 2P_3 - \dots - (m-1)P_m + (m-1)S_{m+1} - mS_m.$$

Si l'on pose

$$\varphi = \frac{2\tilde{\varphi}}{m},$$

nous aurons définitivement

$$(III) \quad \begin{cases} \int \frac{(x + II)dx}{\sqrt{x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}} \\ = -\frac{1}{m} \log \prod_{i=0}^{i=m-1} [p(u - i\varphi) - p\varphi]^{i-1}, \end{cases}$$

II étant une quantité indéterminée.

Exemple. — Proposons-nous d'évaluer l'intégrale ⁽¹⁾

$$\int \frac{(x + II)dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4x + 1}}.$$

⁽¹⁾ ABEL, t. I, p. 142; 1881.

D'après les formules connues d'inversion ⁽¹⁾, nous aurons

$$p\nu = -\frac{1}{3}, \quad p'\nu = 1,$$

$$g_2 = \frac{4}{3}, \quad g_3 = -\frac{19}{27};$$

en outre, il est facile de prouver que

$$\nu = \frac{2\tilde{\omega}}{5},$$

de même

$$pu = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{3} + R),$$

$$p'u = x^3 + x + 1 + xR,$$

$$p(u + \nu) - p\nu = \frac{1}{2}(x^2 + 1 - R),$$

$$pu - p\nu = \frac{1}{2}(x^2 + 1 + R).$$

L'intégrale s'exprime par la formule suivante

$$5 \int \frac{(x + H)dx}{R}$$

$$= -\log \frac{[p(u - 2\nu) - p\nu][p'u + 2\nu] - p\nu]^2 [p(u + \nu) - p\nu]^3}{pu - p\nu}.$$

D'après la formule d'addition nous aurons

$$p(u - 2\nu) - p\nu = \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x + x(x - 1)R}{x^4 + 2x + 1 + (x^2 - 1)R} = \frac{x}{x + 1},$$

$$p(u + 2\nu) - p\nu = \frac{x^2 + 2x + 1 + R}{x^2}.$$

Par conséquent

$$5 \int \frac{(x + H)dx}{R} = -\log \frac{(x^2 + 2x + 1 + R)^2}{(x + 1)(x^2 + 1 + R)^2(x^2 + 1 + R)^2}$$

$$= -\log \frac{x^2(x + 1)}{(x^2 - 1 + R)^2(x^2 + 1 + R)^2}.$$

⁽¹⁾ HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 120; 1886.

Et comme

$$\begin{aligned}(x^2 - 1 + R)(x^2 - 1 - R) &= -4x(x + 1), \\ (x^2 + 1 + R)(x^2 + 1 - R) &= -4x,\end{aligned}$$

nous aurons définitivement

$$5 \int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4x + 1}} = \log \frac{(x^2 - 1 + R)(x^2 + 1 + R)}{(x^2 - 1 - R)(x^2 + 1 - R)}.$$

SUR LES INTÉGRALES PSEUDO-ELLIPTIQUES
DÉPENDANT DES RADICAUX
DU QUATRIÈME ET SIXIÈME DEGRÉ

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e Série, t. XVII, 1893, pp. 228-236)

1. Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que, à une certaine valeur de H , l'intégrale

$$j = \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[4]{(x - a)^2(x - b)^3(x - c)^3}}$$

soit exprimée par des logarithmes.

A cet effet, supposons

$$x - c = \frac{1}{y};$$

alors

$$j = - \frac{c + H}{\sqrt[4]{(c - a)^2(c - b)^3}} \int \frac{y + G}{y \sqrt[4]{(y + \alpha)^2(y + \beta)^3}} dy,$$

$$G = \frac{1}{c + H}, \quad \alpha = \frac{1}{c - a}, \quad \beta = \frac{1}{c - b}.$$

Supposons

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{\frac{128}{3} (y + \alpha)^2(y + \beta)^3}} = dz$$

et déterminons y par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^4 = \frac{128}{3} (y + \alpha)^2(y + \beta)^3,$$

ainsi que par la condition que y a son infini pour $z = 0$. Alors

$$\begin{aligned} y &= 6p^2z - \beta, \\ g_2 &= \frac{2(3 - \alpha)}{3}, \quad g_3 = 0, \\ p'z &= \sqrt{4p^3z - \frac{2(\beta - \alpha)}{3}pz}, \\ j &= -\frac{4(c + H)}{\sqrt[4]{6(c - a)^2(c - b)^3}} \int \frac{y + G}{y} dz, \end{aligned}$$

ou

$$j = -\frac{4(c + H)z}{\sqrt[4]{6(c - a)^2(c - b)^3}} - \frac{4}{\sqrt[4]{6(c - a)^2(c - b)^3}} \int \frac{dz}{6p^2z - \beta}.$$

Calculons maintenant l'intégrale

$$A = \int \frac{dz}{p^2z - \frac{\beta}{6}}.$$

En posant

$$\frac{\beta}{6} = p^2z_0,$$

nous avons

$$\frac{1}{p^2z - \frac{\beta}{6}} = \frac{1}{2pz_0} \left(\frac{1}{pz - pz_0} - \frac{1}{pz + pz_0} \right).$$

Nous avons encore

$$\frac{1}{pz - pz_0} = \frac{1}{p'z_0} [\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0) + 2\zeta z_0].$$

En outre, en posant

$$\sqrt{\mu} = -\sqrt{-1} = -i$$

dans la formule

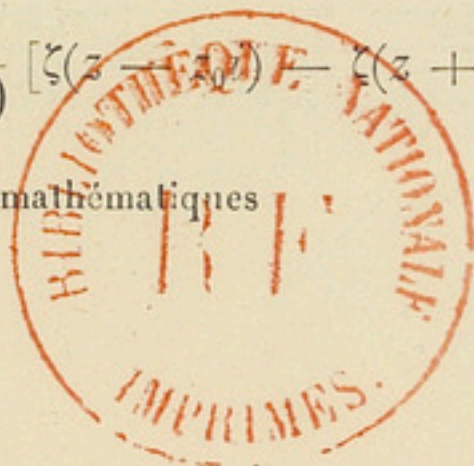
$$p\left(\frac{z_0}{\sqrt{\mu}}, \mu^2g_2, 0\right) = \mu p(z_0, g_2, 0),$$

nous obtiendrons

$$-p(z_0i, g_2, 0) = p(z_0, g_2, 0),$$

par conséquent

$$\frac{1}{pz + pz_0} = \frac{1}{p'(z_0i)} [\zeta(z - z_0i) - \zeta(z + z_0i) + 2\zeta(z_0i)];$$



donc

$$\frac{1}{p^2 z - \frac{\beta}{6}} = \frac{1}{2pz_0 p' z_0} \left\{ \zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0) \right. \\ \left. + i[\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i)] + 4\zeta z_0 \right\};$$

par conséquent

$$A = \frac{2z\zeta z_0}{pz_0 p' z_0} + \frac{1}{2pz_0 p' z_0} \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)} \right]^i \right\}.$$

Calculons maintenant $p z_0 p' z_0$. De l'équation

$$p' z = \sqrt{4p^3 z - \frac{2(\beta - \alpha)}{3} p z},$$

nous aurons

$$p' z_0 = \sqrt[4]{\frac{\beta}{6}} \sqrt{\frac{2\alpha}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{6\alpha^2 \beta};$$

par conséquent

$$pz_0 p' z_0 = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{\alpha^2 \beta^3}{6}}, \\ pz_0 p' z_0 = \frac{1}{3 \sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}};$$

par conséquent

$$A = 6\zeta z_0 \sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3} z \\ + \frac{3}{2} \sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3} \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)} \right]^i \right\}.$$

donc

$$j = - \frac{4(c+H)z}{\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}} - 4\zeta(z_0)z - \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)} \right]^i \right\}.$$

Si nous choisissons H sous la condition

$$\frac{c+H}{\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}} + \zeta(z_0) = 0,$$

nous aurons définitivement

$$- \int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} = \log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} + i \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)}.$$

Nous avons en outre

$$pz - pz_0 = - \frac{\sigma(z + z_0)\sigma(z - z_0)}{\sigma^2 z \sigma^2 z_0},$$

$$pz - pz_0 i = - \frac{\sigma(z + z_0 i)\sigma(z - z_0 i)}{\sigma^2 z \sigma^2 z_0 i};$$

par conséquent

$$- \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} = - \log(pz - pz_0) - i \log(pz - pz_0 i) \\ + 2 \log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma z} + 2i \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma z}.$$

Si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}$ est une partie commensurable d'une période, nous avons

$$\log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma z} = - \frac{1}{m} \log \prod_{\rho=0}^{\rho=m-1} \{p(z + \rho z_0) - pz_0\}^{\rho-1},$$

$$\log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma z} = - \frac{1}{m} \log \prod_{\rho=0}^{\rho=m-1} \{p(z + \rho z_0 i) - pz_0 i\}^{\rho-1} \quad (1),$$

donc

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} \\ = \log \{ (pz - pz_0)(pz - pz_0 i)^i \} \\ + \frac{2}{m} \log \prod_{\rho=0}^{\rho=m-1} \{ [p(z + \rho z_0) - pz_0] [p(z + \rho z_0 i) - pz_0 i]^i \}^{\rho-1}.$$

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné*

$$g_2 = \frac{2(b-a)}{3(c-a)(c-b)}, \quad g_3 = 0,$$

$$pz_0 = \frac{1}{\sqrt{6(c-b)}},$$

(1) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 137; mai 1893.

si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes.

2. Exemple. — Soit donné

$$j = \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

où

$$c = 2a - b.$$

Nous avons

$$\alpha = \frac{1}{c-a} = \frac{1}{a-b}, \quad \beta = \frac{1}{c-b} = \frac{1}{2(a-b)},$$

$$g_2 = -\frac{1}{3(a-b)}, \quad g_3 = 0,$$

$$pz_0 = \pm \frac{1}{2\sqrt{3(a-b)}},$$

$$p'z_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{3^3(a-b)^3}},$$

$$p''z_0 = 6p^2z_0 - \frac{1}{2}g_2 = \frac{2}{3(a-b)},$$

D'après la formule de la duplication de l'argument, nous aurons

$$p(2z_0) = -\frac{1}{\sqrt{3(a-b)}} + \frac{1}{4} \left[\frac{2\sqrt{3^3(a-b)^3}}{3(a-b)} \right]^2,$$

$$j(2z_0) = 0,$$

donc

$$2z_0 = \tilde{\omega}_0, \quad z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{4},$$

c'est-à-dire z_0 est le quart d'une période; l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes. Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — Si les racines a, b, c du polynôme

$$(x - a)^2(x - b)^3(x - c)^3$$

forment une progression arithmétique dont la raison est $(a - b)$, l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[3]{(x - a)^2(x - b)^3(x - c)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes.

3. Résolvons un problème semblable relativement à l'intégrale

$$j = \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{(x - a)^3(x + b)^4(x - c)^5}}.$$

En posant

$$x - c = \frac{1}{y},$$

nous aurons

$$j = - \frac{c + H}{\sqrt[6]{(c - a)^3(c - b)^4}} \int \frac{(y + G)dy}{y \sqrt[6]{(y + \alpha)^3(y + \beta)^4}},$$

où

$$\alpha = \frac{1}{c - a}, \quad \beta = \frac{1}{c - b}, \quad G = \frac{1}{c + H}.$$

Supposons

$$\frac{dy}{\sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3^5}{5} (y + \alpha)^3(y + \beta)^4}} = dz,$$

et déterminons y par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^6 = \frac{2^3 \cdot 3^5}{5} (y + \alpha)^3(y + \beta)^4,$$

ainsi que par la condition que y a son infini pour $z = 0$. Il est facile de prouver par la substitution immédiate que

$$y = 120p^3z - \beta,$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{1}{30}(\beta - \alpha),$$

$$p'z = \sqrt{4p^3z - \frac{\beta - \alpha}{30}}.$$

Alors

$$j = - \frac{(c + H)z}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3 \cdot 3^5} (c - a)^3 (c - b)^4}} - \frac{1}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3 \cdot 3^5} (c - a)^3 (c - b)^4}} \int \frac{dz}{120p^3z - \beta},$$

$$j = - \frac{(c + H)z}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3 \cdot 3^5} (c - a)^3 (c - b)^4}} - \frac{A}{120 \sqrt[6]{\frac{5}{2^3 \cdot 3^5} (c - a)^3 (c - b)^4}},$$

$$A = \int \frac{dz}{p^3z - \frac{\beta}{120}}.$$

Supposons

$$\frac{\beta}{120} = p^3z_0, \quad pz_0 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\beta}{15}};$$

nous aurons

$$\frac{1}{p^3z - p^3z_0} = \frac{1}{3p^2z_0} \left(\frac{1}{pz - pz_0} + \frac{\varepsilon}{pz - p\varepsilon z_0} + \frac{\varepsilon^2}{pz - p\varepsilon^2 z_0} \right),$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^3z - p^3z_0} &= \frac{1}{3p^2z_0 p^2z_0} \{ [\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0)] \\ &\quad + \varepsilon [\zeta(z - \varepsilon z_0) - \zeta(z + \varepsilon z_0)] \\ &\quad + \varepsilon^2 [\zeta(z - \varepsilon^2 z_0) - \zeta(z + \varepsilon^2 z_0)] + 6\zeta z_0 \}, \\ \varepsilon^3 - 1 &= 0; \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\zeta(z_0)z}{p^2z_0 p'z_0} \\ &\quad + \frac{1}{3p^2z_0 p'z_0} \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon z_0)}{\sigma(z + \varepsilon z_0)} \right] \varepsilon \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon^2 z_0)}{\sigma(z + \varepsilon^2 z_0)} \right] \varepsilon^2 \right\}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $p^2z_0 p'z_0$. De l'équation

$$p'z = \sqrt{4p^3z - \frac{\beta - \alpha}{30}},$$

nous avons

$$p z_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{30}}.$$

donc

$$p^2 z_0 p' z_0 = \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2}} \sqrt{\frac{\alpha}{2 \cdot 3 \cdot 5}} = \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} \sqrt[3]{\frac{\alpha^3 \beta^4}{120}},$$

$$p^2 z_0 p' z_0 = \frac{1}{60 \sqrt[3]{120(c-a)^3(c-b)^4}};$$

alors

$$j = - \frac{(c+H)z}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3 \cdot 3^5} (c-a)^3(c-b)^4}} - 6\zeta(z_0)z$$

$$- \log \left\{ \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \left[\frac{\sigma(z-\varepsilon z_0)}{\sigma(z+\varepsilon z_0)} \right]^\varepsilon \left[\frac{\sigma(z-\varepsilon^2 z_0)}{\sigma(z+\varepsilon^2 z_0)} \right]^{\varepsilon^2} \right\}.$$

En posant

$$\frac{c+H}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3 \cdot 3^5} (c-a)^3(c-b)^4}} + 6\zeta z_0 = 0,$$

nous obtiendrons

$$j = - \log \left\{ \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \left[\frac{\sigma(z-\varepsilon z_0)}{\sigma(z+\varepsilon z_0)} \right]^\varepsilon \left[\frac{\sigma(z-\varepsilon^2 z_0)}{\sigma(z+\varepsilon^2 z_0)} \right]^{\varepsilon^2} \right\},$$

ou

$$j = \log \{ (pz - pz_0)(pz - p\varepsilon z_0)^\varepsilon (pz - p\varepsilon^2 z_0)^{\varepsilon^2} \}$$

$$- 2 \log \left\{ \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma z} \left[\frac{\sigma(z-\varepsilon z_0)}{\sigma z} \right]^\varepsilon \left[\frac{\sigma(z-\varepsilon^2 z_0)}{\sigma z} \right]^{\varepsilon^2} \right\},$$

ou enfin

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$$

$$= \log \{ (pz - pz_0)(pz - p\varepsilon z_0)^\varepsilon (pz - p\varepsilon^2 z_0)^{\varepsilon^2} \}$$

$$+ \frac{2}{m} \log \prod_{\rho=0}^{\rho=m-1} \{ [p(z - \rho z_0) - pz_0] [p(z - \rho \varepsilon z_0) - p\varepsilon z_0]^\varepsilon$$

$$\times [p(z - \rho \varepsilon^2 z_0) - p\varepsilon^2 z_0]^{\varepsilon^2} \}^{\rho-1} \quad (1),$$

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}.$$

Nous aurons le théorème suivant :

(1) *Loc. cit.*, p. 136.

THÉORÈME. — *Étant donné*

$$g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{b-a}{30(a-c)(b-c)},$$

si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

4. Exemple. — Soit donné

$$j = \int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$$

où

$$c = 4b - 3a.$$

Nous avons

$$\alpha = \frac{1}{4(b-a)}, \quad \beta = \frac{1}{3(p-a)},$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{1}{360(b-a)},$$

$$pz_0 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\beta}{15}}, \quad p'z_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{30}}.$$

D'après la formule de la duplication de l'argument, nous aurons

$$p2z_0 = \frac{9\beta - 8\alpha}{8\alpha} \sqrt[3]{\frac{\beta}{15}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\beta}{15}} = pz_0,$$

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{3};$$

l'intégrale j s'exprime par des logarithmes. Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *S'il existe parmi les racines du polynôme*

$$(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^4$$

la relation

$$c = 4b - 3a,$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$$

s'exprime par des logarithmes.

SUR LA FORME PLUS PRÉCISE DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES RÉSOLUBLES PAR RADICAUX

(Bull. des Sciences math., 2^e série, t. XVIII, 1894, pp. 130-143)

1. La forme générale des racines des équations algébriques résolubles par radicaux a été donnée sans démonstration par Abel dans le *Mémoire inachevé Sur la résolution algébrique des équations* ⁽¹⁾. Dans ce *Mémoire*, Abel a donné le théorème suivant : *Si une équation irréductible dont le degré est un nombre premier est résoluble algébriquement, ses racines doivent avoir la forme*

$$(1) \quad x = A + \sqrt[n]{R_1} + \sqrt[n]{R_2} + \dots + \sqrt[n]{R_{n-1}},$$

où A est une quantité rationnelle, $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ sont les racines de l'équation de $(n - 1)$ degré. Relativement à ce résultat, Kronecker fait la juste remarque que la forme des racines continue à n'être pas suffisamment claire. « Le seul travail, selon Kronecker ⁽²⁾, qui jette quelque lumière sur ce point, savoir : une Notice d'Abel sur les racines des équations du cinquième degré à coefficients entiers, semble avoir été peu remarqué. » Dans sa lettre à Holmboë du 24 octobre 1826, Abel s'exprime à ce sujet ainsi ⁽³⁾ : « Quant aux équations du cinquième degré, j'ai trouvé que, quand une telle équation est résoluble algébriquement, il faut que la racine ait la forme suivante

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''},$$

où R, R', R'', R''' sont les quatre racines d'une équation du quatrième degré qui sont exprimables par des racines carrées seules ».

⁽¹⁾ *Œuvres complètes*, t. II, p. 222 ; 1881.

⁽²⁾ SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 654 ; 1866.

⁽³⁾ *Œuvres complètes*, t. II, p. 260 ; 1881.

Kronecker, dans sa Communication à l'Académie des Sciences de Berlin le 20 juin 1853, éclaircit considérablement la forme (1) des racines des équations du degré premier résolubles par radicaux. Il a montré effectivement que

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_{n-1}$$

possèdent la propriété spéciale consistant en ce que « non seulement les fonctions symétriques de $R_1, R_2, \dots$ soient rationnellement connues (ce qu'Abel a remarqué), mais aussi que les fonctions cycliques des quantités $R_1, R_2, \dots$, prises dans un certain ordre, soient également rationnellement connues : en d'autres termes, l'équation de degré $(n - 1)$ dont $R_1, R_2, \dots$ sont les racines doit être une équation abélienne ⁽¹⁾ ». Les théorèmes d'Abel, proposés dans le Mémoire mentionné plus haut, ont été démontrés plus tard par plusieurs auteurs. Je puis indiquer deux travaux sur ce sujet : l'un appartient à Malmsten dans le tome 34 et l'autre à M. Boldt dans le tome 87 du *Journal de Crelle*. Dans l'article présent, on essaye de donner à la formule (1) une forme plus précise que celle de Kronecker.

2. Soit donnée une équation algébrique irréductible

$$x^n + px^{n-2} + qx^{n-3} + \dots + rx + s = 0,$$

où n est un nombre premier.

En désignant les racines de cette équation, avec Serret, par

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1},$$

formons la fonction linéaire de ces racines

$$R_1 = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha^2x_{n-2} + \alpha x_{n-1},$$

où α est l'une des racines imaginaires de l'équation binôme

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Changeons R_1 par des degrés de substitution circulaire

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{pmatrix},$$

⁽¹⁾ SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 657; 1866.

Écrivons, pour abréger,

$$(\alpha^k + \alpha^l) = (k, l);$$

nous aurons

$$\begin{aligned} R_1 R_{n-1} = & \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1, n-1)x_0 x_1 + (2, n-2)x_0 x_2 + \dots \\ & + (1, n-1)x_0 x_{n-1} + \dots \\ & + (k-i, i-k)x_i x_k + \dots + (1-n, n-1)x_{n-2} x_{n-1}, \end{aligned}$$

ou encore, plus simplement,

$$\begin{aligned} R_1 R_{n-1} = & \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1, -1)x_0 x_1 + (2, -2)x_0 x_2 + \dots + (1, -1)x_0 x_{n-1} + \dots \\ & + (k-i, i-k)x_i x_k + \dots + (1, -1)x_{n-2} x_{n-1}. \end{aligned}$$

En faisant dans cette égalité la substitution

$$F = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$$

$\frac{n-3}{2}$ fois successivement, nous aurons

$$\begin{aligned} R_\rho R_{n-\rho} = & \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1, -1)x_0 x_\rho + (2, -2)x_0 x_{2\rho} + \dots \\ & + (1, -1)x_0 x_{n-\rho} + \dots + (k-i, i-k)x_{i\rho} x_{k\rho} + \dots + (1, -1)x_{n-2\rho} x_{n-\rho}, \\ R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} = & \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1, -1)x_0 x_{\rho^2} + (2, -2)x_0 x_{2\rho^2} + \dots \\ & + (1, -1)x_0 x_{n-\rho^2} + \dots + (k-i, i-k)x_{i\rho^2} x_{k\rho^2} + \dots, \\ R_{\rho^3} R_{n-\rho^3} = & \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1, -1)x_0 x_{\rho^3} + \dots + (1, -1)x_0 x_{n-\rho^3} + \dots \\ & + (k-i, i-k)x_{i\rho^3} x_{k\rho^3} + \dots + (1, -1)x_{n-2\rho^3} x_{n-\rho^3}, \\ & \dots \dots \dots \\ R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = & \sum_1^{n-1} x_i^2 + (1, -1)x_0 x_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \dots + (1, -1)x_0 x_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \dots \\ & + (k-i, i-k)x_{i\rho^{\frac{n-3}{2}}} x_{k\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \dots + (1, -1)x_{n-2\rho^{\frac{n-3}{2}}} x_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}. \end{aligned}$$

En additionnant ces équations, nous verrons que les termes semblables ne peuvent avoir de coefficients égaux. Démontrons la vérité de cette propriété pour les termes

$$x_0 x_r, \quad r \leq n-1,$$

et pour les termes

$$x_i x_k, \quad i, k \leq n - 1.$$

Dans l'expression

$$R_{\rho^l} R_{n-\rho^l},$$

nous aurons le terme

$$(m, -m) x_0 x_m \rho^l;$$

et dans l'expression

$$R_{\rho^j} R_{n-\rho^j},$$

nous aurons le terme

$$(m, -m) x_0 x_m \rho^j.$$

S'il arrivait que ces termes ayant des coefficients égaux fussent identiques, nous devrions conclure

$$\rho^l \equiv \rho^j \pmod{n},$$

ce qui est impossible, car

$$l \leq \frac{n-3}{2}, \quad j \leq \frac{n-3}{2};$$

ρ est une racine primitive du nombre n .

Supposons maintenant, en général,

$$(k-i, i-k) x_{i\rho^l} x_{k\rho^l} = (k-i, i-k) x_{(i+m)\rho^j} x_{(k+m)\rho^j},$$

où m peut être nul, positif ou négatif. L'égalité ci-dessus entraîne les deux suppositions suivantes :

1° Il existe simultanément deux congruences

$$i\rho^l \equiv i\rho^j + m\rho^j,$$

$$k\rho^l \equiv k\rho^j + m\rho^j,$$

d'où

$$(i-k)\rho^l \equiv (i-k)\rho^j,$$

ou

$$\rho^l \equiv \rho^j \pmod{n},$$

ce qui est impossible d'après ce qui précède.

2° Il existe simultanément deux congruences

$$i\rho^l \equiv k\rho^j + m\rho^j,$$

$$k\rho^l \equiv i\rho^j + m\rho^j,$$

ou

$$\rho^l + \rho^j \equiv 0 \pmod{n},$$

ou

$$\rho' \equiv n - \rho',$$

ce qui est également impossible suivant la définition de Q.

Ainsi les coefficients des membres semblables sont tous différents. C'est pourquoi, après l'addition, les coefficients de chaque membre tel que

$$x_i x_k; \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

seront

$$\begin{aligned} & (1, -1) + (2, -2) + \dots + \left(\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2} \right) \\ &= \alpha + \alpha^{n-1} + \alpha^2 + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha^{\frac{n-1}{2}} + \alpha^{\frac{n+1}{2}} = -1. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} Q &= R_1 R_{n-1} + R_\rho R_{n-\rho} + \dots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} \\ &= \frac{n-1}{2} \sum_0^{n-1} x_i^2 - \sum x_i x_k = -np. \end{aligned}$$

5. Voyons maintenant quel changement s'opérera si dans la fonction

$$R_{\rho^g} = x_0 + \alpha^{n-1} x_{\rho^g} + \alpha^{n-2} x_{2\rho^g} + \dots + \alpha x_{n-\rho^g}$$

nous faisons la substitution

$$S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\alpha^{n-1} = \alpha^{-1} = \alpha^{\pi\rho^g};$$

alors

$$\pi\rho^g \equiv -1 \pmod{n},$$

par conséquent

$$\pi \equiv \rho^{\frac{n-1}{2}-g}.$$

En supposant

$$a^\pi = \beta,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}}}, \\ \alpha^{n-1} &= \beta^{\rho^g}; \end{aligned}$$

donc

$$R_{\rho^g} = x_0 + \beta^{\rho^g} x_{\rho^g} + \beta^{2\rho^g} x_{2\rho^g} + \beta^{3\rho^g} x_{3\rho^g} + \dots$$

Comme

$$S(R_{\rho^g}) = x_1 + \beta^{\rho^g} x_{\rho^g+1} + \beta^{2\rho^g} x_{2\rho^g+1} + \beta^{3\rho^g} x_{3\rho^g+1} + \dots,$$

nous aurons

$$S(R_{\rho^g}) = \beta^{-1} R_{\rho^g},$$

ou

$$S(R_{\rho^g}) = (x^{-1}) \rho^{\frac{n-1-2g}{2}} R_{\rho^g}.$$

De même

$$S(R_{\rho^h}) = (x^{-1}) \rho^{\frac{n-1-2h}{2}} R_{\rho^h};$$

par conséquent

$$S(R_{\rho^g} R_{\rho^h}) = (x^{-1}) \rho^{\frac{n-1-2g}{2} + \frac{n-1-2h}{2}} R_{\rho^g} R_{\rho^h}.$$

Mais

$$\rho^{\frac{n-1-2g}{2}} \equiv -\rho^{n-1-g} \pmod{n},$$

$$\rho^{\frac{n-1-2h}{2}} \equiv -\rho^{n-1-h} \pmod{n},$$

donc

$$(x^{-1}) \rho^{\frac{n-1-2g}{2} + \frac{n-1-2h}{2}} = x \rho^{n-1-g} + \rho^{n-1-h}.$$

Maintenant posons

$$\rho^g + \rho^h \equiv 0 \pmod{n},$$

c'est-à-dire

$$\rho^g \equiv -\rho^h \pmod{n},$$

$$g - h = \frac{n-1}{2},$$

alors

$$\rho^{n-1-g} + \rho^{n-1-h} \equiv 0 \pmod{n},$$

par conséquent

$$(x^{-1}) \rho^{\frac{n-1-2g}{2} + \frac{n-1-2h}{2}} = 1;$$

alors

$$S(R_{\rho^g} R_{\rho^h}) = R_{\rho^g} R_{\rho^h};$$

par conséquent

$$S(R_{\rho^g} R_{n-\rho^g}) = R_{\rho^g} R_{n-\rho^g},$$

D'où il suit que la substitution

$$S = \begin{pmatrix} z + 1 \\ z \end{pmatrix}$$

n'altère pas la fonction

$$Q = R_1 R_{n-1} + R_{\rho} R_{n-\rho} + \dots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}};$$

Il est très facile de prouver que la substitution

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$$

n'altérera pas la fonction Q . En effet

$$F(Q) = R_\rho R_{n-\rho} + R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \dots + R_{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-1}{2}}};$$

et comme

$$\begin{aligned} \rho^{\frac{n-1}{2}} &\equiv -1 \equiv n-1 \pmod{n}, \\ n - \rho^{\frac{n-1}{2}} &\equiv 1, \end{aligned}$$

nous aurons

$$T(Q) = Q.$$

6. De ce qui précède on voit que Q n'est pas altéré par les substitutions du groupe

$$\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix}$$

a, b sont des nombres entiers. Il existe une infinité de fonctions formées comme Q et qui sont exprimables rationnellement par des quantités connues. D'après la théorie de Galois, ne sont solubles par radicaux que les équations de degré premier pour lesquelles toutes les fonctions qui ne s'altèrent pas par des substitutions

$$\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix}$$

sont rationnellement connues. Indépendamment de la théorie de Galois on peut prouver que si l'équation (irréductible et de degré premier) est telle que toutes les fonctions des racines, ne s'altérant pas par des substitutions

$$\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix}$$

s'expriment rationnellement par des quantités connues, l'équation est soluble par des radicaux, et l'on peut trouver la forme précise des racines de cette équation.

Formons la fonction des racines

$$\left(R_1 R_{n-1} + \omega R_\rho R_{n-\rho} + \omega^2 R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \dots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} \right)^{\frac{n-1}{2}} = \mathfrak{A}_1,$$

De ces équations nous aurons successivement

$$R_1 R_{n-1} = \frac{2}{n-1} \left(-np + \sqrt[n-1]{A_1} + \sqrt[n-1]{A_2} + \dots + \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}} \right),$$

$$R_\rho R_{n-\rho} = \frac{2}{n-1} \left(-np + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{A_1} + \omega^{\frac{n-5}{2}} \sqrt[n-1]{A_2} + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}} \right),$$

$$R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \frac{2}{n-1} \left(-np + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{A_1} + \dots + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}} \right),$$

où $A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n-3}{2}}$ s'exprimeront rationnellement par des coefficients de l'équation proposée.

7. Formons la fonction rationnelle des racines

$$(R_1^n + R_{n-1}^n) + (R_\rho^n + R_{n-\rho}^n + \dots + (R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}})^n) = L_0.$$

Cette fonction, ne s'altérant pas des substitutions du groupe

$$\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix},$$

sera rationnellement connue.

La fonction des racines

$$\left[(R_1^n + R_{n-1}^n) + \omega (R_\rho^n + R_{n-\rho}^n + \dots + \omega^{\frac{n-3}{2}} (R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}})^n) \right]^{\frac{n-1}{2}} = L_1,$$

ne change pas également par des substitutions du groupe

$$\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix},$$

et, par conséquent, en raisonnant comme plus haut, nous trouverons successivement

$$R_1^n + R_{n-1}^n = \frac{2}{n-1} \left(L_0 + \sqrt[n-1]{L_1} + \sqrt[n-1]{L_2} + \dots + \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}} \right),$$

$$R_\rho^n + R_{n-\rho}^n = \frac{2}{n-1} \left(L_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}} \right).$$

.....

$$R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \frac{2}{n-1} \left(L_0 + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}} \right).$$

Nous aurons ainsi pour trouver R_1^n et R_{n-1}^n deux équations

$$R_1^n R_{n-1}^n = \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \sqrt[n-1]{A_1} + \dots + \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

$$R_1^n + R_{n-1}^n = \frac{2}{n-1} \left(L_0 + \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

Donc R_1^n et R_{n-1}^n sont les racines d'une équation du deuxième degré

$$t^2 - \frac{2}{n-1} \left(L_0 + \sqrt[n-1]{L_1} + \sqrt[n-1]{L_2} + \dots + \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right)t + \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \sqrt[n-1]{A_1} + \dots + \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n = 0.$$

En la résolvant nous avons

$$R_1^n = \frac{1}{n-1} \left(L_0 + \sqrt[n-1]{L_1} + \sqrt[n-1]{L_2} + \dots + \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right) + \sqrt{\left(\frac{L_0 + \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \sqrt[n-1]{A_1} + \dots + \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n};$$

$$R_{n-1}^n = \frac{1}{n-1} \left(L_0 + \sqrt[n-1]{L_1} + \sqrt[n-1]{L_2} + \dots + \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right) - \sqrt{\left(\frac{L_0 + \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \sqrt[n-1]{A_1} + \dots + \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n}.$$

De même nous trouverons deux à deux R_ρ^n et $R_{n-\rho}^n$; $R_{\rho^2}^n$ et $R_{n-\rho^2}^n$; ... Nous avons, par exemple,

$$R_\rho^n = \frac{1}{n-1} \left(L_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right) + \sqrt{\left(\frac{L_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{A_1} + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n},$$

$$R_{n-\rho}^n = \frac{1}{n-1} \left(L_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right) - \sqrt{\left(\frac{L_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[n-1]{L_1} + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{L_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \dots + \omega^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n-1]{A_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n}.$$

8. Pour l'équation du troisième degré nous avons, par la formule générale,

$$R_1 R_2 = -3p;$$

en outre

$$R_1^3 + R_2^3 = (R_1 + R_2)(R_1^2 - R_1 R_2 + R_2^2) = -27q;$$

donc

$$R_1^3 = -\frac{27q}{2} + \sqrt{\frac{27^2 q^2}{4} + 27p^3},$$

$$R_2^3 = -\frac{27q}{2} - \sqrt{\frac{27^2 q^2}{4} + 27p^3},$$

$$\frac{1}{3} R_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\frac{1}{3} R_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

9. Pour l'équation du cinquième degré

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

nous aurons

$$R_1 = \sqrt[5]{\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4} + \sqrt{\left(\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p + \sqrt{A_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_4 = \sqrt[5]{\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4} - \sqrt{\left(\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p + \sqrt{A_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_2 = \sqrt[5]{\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4} + \sqrt{\left(\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p - \sqrt{A_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_3 = \sqrt[5]{\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4} - \sqrt{\left(\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p - \sqrt{A_1}}{2}\right)^5}},$$

Ces résultats s'accordent complètement avec la forme prévue par Abel.

10. Il nous reste maintenant à exprimer les racines de l'équation

$$\begin{array}{ccccccc} x_0, & x_1, & \dots, & x_{n-1} \\ \text{par des} & R_1, & R_2, & \dots, & R_{n-1}. \end{array}$$

Nous avons

$$R_1 = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \dots + \alpha^{n-k}x_k + \dots + \alpha x_{n-1};$$

d'où

$$R_2 = x_0 + \alpha^{n-1}x_2 + \alpha^{n-2}x_4 + \dots + \alpha^{n-k}x_{2k} + \dots + \alpha^2x_{n-2} + \alpha x_{n-1}.$$

Si

$$2k \equiv 1 \pmod{n},$$

nous aurons

$$R_2 = x_0 + \alpha^{n-k}x_1 + \alpha^{n-2k}x_2 + \alpha^{n-3k}x_3 + \dots + \alpha^kx_{n-1}.$$

De même

$$R_3 = x_0 + \alpha^{n-l}x_1 + \alpha^{n-2l}x_2 + \dots + \alpha^lx_{n-1},$$

où

$$3l \equiv 1 \pmod{n};$$

$$R_4 = x_0 + \alpha^{n-m}x_1 + \alpha^{n-2m}x_2 + \dots + \alpha^mx_{n-1},$$

où

$$4m \equiv 1 \pmod{n};$$

.....

$$R_{n-1} = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2x_2 + \dots + \alpha^{n-1}x_{n-1}.$$

De là nous aurons successivement

$$x_0 = \frac{1}{n} (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_{n-1}),$$

$$x_1 = \frac{1}{n} (\alpha R_1 + \alpha^k R_2 + \alpha^l R_3 + \dots + \alpha^{n-1} R_{n-1}),$$

$$x_2 = \frac{1}{n} (\alpha^2 R_1 + \alpha^{2k} R_2 + \alpha^{2l} R_3 + \dots + \alpha^{n-2} R_{n-1}),$$

$$x_3 = \frac{1}{n} (\alpha^3 R_1 + \alpha^{3k} R_2 + \alpha^{3l} R_3 + \dots + \alpha^{n-3} R_{n-1}),$$

.....

$$x_{n-1} = \frac{1}{n} (\alpha^{n-1} R_1 + \alpha^{n-k} R_2 + \dots + \alpha R_{n-1}),$$

où $k, l, \dots$ sont définies par les congruences mentionnées plus haut,

SUR LA RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE DES ÉQUATIONS DE DEGRÉ PREMIER

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XIX, 1895, pp. 27-32)

Nous avons l'intention d'indiquer ici un théorème au moyen duquel on peut résoudre par radicaux les équations de cinquième et septième degré, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si ces équations possèdent le groupe de Galois.

Prenons une équation algébrique irréductible

$$x^n + px^{n-2} + qx^{n-3} + \dots + rx + s = 0,$$

de degré premier n à coefficients entiers

$$p, \quad q, \quad \dots, \quad r, \quad s.$$

Formons une fonction linéaire des racines

$$R_1 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^\rho x_\rho + \dots + \alpha^{n-1} x_{n-1},$$

où α est une racine imaginaire de l'équation binôme

$$\alpha^n - 1 = 0;$$

ρ est une racine primitive du nombre premier n .

Désignons les substitutions fondamentales du groupe linéaire

$$\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix}$$

par

$$S = \begin{pmatrix} z + 1 \\ z \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}.$$

Soit

$$T(R_1) = R_\rho, \quad T(R_\rho) = R_{\rho^2}, \quad \dots$$

THÉORÈME I. — *Si à la fonction*

$$R_{\rho^k} = x_0 + \alpha x_{\rho^k} + \alpha^2 x_{2\rho^k} + \dots$$

nous appliquons la substitution

$$S = \begin{pmatrix} z + 1 \\ z \end{pmatrix},$$

nous aurons

$$S(R_{\rho^k}) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2k}{2}}} R_{\rho^k}.$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} S(R_{\rho^k}) &= x_1 + \alpha x_{\rho^k+1} + \dots + \alpha^{\mu} x_{\mu\rho^k+1} + \dots \\ &\quad + \alpha^{\nu} x_{\nu\rho^k+1} + \dots + \alpha^{\pi} x_{\pi\rho^k+1} + \dots \end{aligned}$$

Soit

$$\mu\rho^k + 1 \equiv \rho^k \pmod{n},$$

alors

$$\mu \equiv \rho^{\frac{n-1-2k}{2}} + 1 \pmod{n}.$$

Si nous avons

$$\nu\rho^k + 1 \equiv 2\rho^k,$$

alors

$$\nu \equiv \rho^{\frac{n-1-2k}{2}} + 2;$$

de même

$$\pi \equiv \rho^{\frac{n-1-2k}{2}} + 3,$$

si

$$\pi\rho^k + 1 \equiv 3\rho^k \pmod{n};$$

donc

$$S(R_{\rho^k}) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2k}{2}}} (\alpha x_{\rho^k} + \alpha^2 x_{2\rho^k} + \alpha^3 x_{3\rho^k} + \dots),$$

donc

$$S(R_{\rho^k}) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2k}{2}}} R_{\rho^k}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II. — *Si nous changeons α en α^{ρ} , la série*

$$R_1, R_{\rho}, R_{\rho^2}, \dots, R_{\rho^{n-2}}$$

est remplacée par la série

$$R_{\rho^{n-2}}, R_1, R_{\rho}, \dots, R_{\rho^{n-3}},$$

c'est-à-dire tous les indices se multiplient par ρ^{n-2} .

En effet, nous avons

$$R_{\rho^k} = x_0 + \alpha x_{\rho^k} + \alpha^2 x_{2\rho^k} + \dots = f(\alpha).$$

En remplaçant ici α par α^ρ , nous aurons

$$f(\alpha^\rho) = x_0 + \alpha^\rho x_{\rho^k} + \alpha^{2\rho} x_{2\rho^k} + \dots + \alpha^{\mu\rho} x_{\mu\rho^k} + \dots \\ + \alpha^{\nu\rho} x_{\nu\rho^k} + \dots + \alpha^{\pi\rho} x_{\pi\rho^k} + \dots$$

Si nous avons

$$\begin{aligned} \mu\rho &\equiv 1 \pmod{n}, \\ \nu\rho &\equiv 2 \quad \quad \quad \text{»} \\ \pi\rho &\equiv 3 \quad \quad \quad \text{»} \\ \dots &\dots \dots \end{aligned}$$

alors

$$f(\alpha^\rho) = x_0 + \alpha x_{\rho^{k-1}} + \alpha^2 x_{2\rho^{k-1}} + \alpha^3 x_{3\rho^{k-1}} + \dots$$

ou

$$f(\alpha^\rho) = R_{\rho^{k-1}} = R_{\rho^k \rho^{n-2}},$$

c'est-à-dire du changement de α en α^ρ la fonction R_{ρ^k} se transforme en $R_{\rho^{k-1}}$, c'est-à-dire l'indice ρ^k se multiplie par ρ^{n-2} .

Formons la fonction des racines

$$\zeta_1(\alpha) = R_1 R_{\rho^2} R_{\rho^4} \dots R_{\rho^{n-3}} + R_{\rho} R_{\rho^3} \dots R_{\rho^{n-2}}.$$

Cette fonction ne change pas évidemment par la substitution

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}.$$

En appliquant à $\zeta_1(\alpha)$ la substitution

$$S = \begin{pmatrix} z + 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

nous obtiendrons

$$S\zeta_1(\alpha) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_1 \alpha^{\rho^{\frac{n-5}{2}}} R_{\rho^2} \dots \alpha^{\rho^{\frac{n+3}{2}}} R_{\rho^{n-3}} \\ + \alpha^{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{\rho} \alpha^{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_{\rho^3} \dots \alpha^{\rho^{\frac{n+1}{2}}} R_{\rho^{n-2}}.$$

En remarquant que

$$\left. \begin{aligned} 1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots + \rho^{n-2} &\equiv 0 \\ \rho + \rho^3 + \rho^5 + \dots + \rho^{n-3} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{n}$$

nous concluons que

$$\left. \begin{aligned} \rho^{\frac{n-1}{2}} + \rho^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \rho^{\frac{n+3}{2}} &\equiv 0 \\ \rho^{\frac{n-3}{2}} + \rho^{\frac{n-1}{2}} + \dots + \rho^{\frac{n+1}{2}} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{n}$$

par conséquent

$$S\zeta_1(\alpha) = \zeta_1(\alpha).$$

Ainsi $\zeta_1(\alpha)$ ne s'altère pas par les substitutions du groupe

$$\begin{pmatrix} az + b \\ z \end{pmatrix}.$$

De telles fonctions, après Kronecker, se nomment *métacycliques*. En outre, il est facile de prouver que $\zeta_1(\alpha)$ ne dépend pas de α . En effet, en changeant α en α^p , nous avons

$$\zeta_1(\alpha^p) = R_p^{n-3} R_p R_p^3 \dots R_p^{n-1} + R_1 R_p^2 R_p^4 \dots R_p^{n-3} = \zeta_1(\alpha).$$

D'où il est clair que

$$\zeta_1(\alpha) = \zeta_1(\alpha^p) + \zeta_1(\alpha^{p^2}) = \dots$$

Si l'équation proposée est résoluble par radicaux, $\zeta_1(\alpha)$ est un nombre entier, c'est-à-dire une racine entière de la résolvante de degré

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2),$$

dont les coefficients sont des nombres entiers connus.

De même il est facile de prouver que

$$(R_1 R_p^2 R_p^4 \dots R_p^{n-3} - R_p R_p^3 R_p^5 \dots R_p^{n-2})^2 = \zeta'_1$$

est un nombre entier connu, par conséquent

$$R_1 R_p^2 R_p^4 \dots R_p^{n-3} = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \sqrt{\zeta'_1}),$$

$$R_p R_p^3 R_p^5 \dots R_p^{n-2} = \frac{1}{2} (\zeta_1 - \sqrt{\zeta'_1}).$$

Les fonctions

$$(R_1^n + R_p^{n-2} + \dots + R_p^{n-3}) + (R_p^n + R_p^{n-3} + \dots + R_p^{n-2}) = \zeta_2,$$

$$[(R_1^n + R_p^{n-2} + \dots + R_p^{n-3}) - (R_p^n + R_p^{n-3} + \dots + R_p^{n-2})]^2 = \zeta'_2$$

appartiennent aussi à la catégorie des fonctions métacycliques et ne dépendent pas de α ; par conséquent elles se trouveront comme les racines entières des résolvantes de degré

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2).$$

Par cette raison nous aurons

$$R_1^n + R_p^{n-2} + \dots + R_p^{n-3} = \frac{1}{2} (\zeta_2 + \sqrt{\zeta'_2}),$$

$$R_p^n + R_p^{n-3} + \dots + R_p^{n-2} = \frac{1}{2} (\zeta_2 - \sqrt{\zeta'_2});$$

ζ_2 et ζ'_2 sont des nombres entiers connus.

Par des considérations semblables, nous verrons que les fonctions

$$\begin{aligned} & (R_1^n R_{\rho^2}^n + R_1^n R_{\rho^4}^n + \dots + R_{\rho^{n-5}}^n R_{\rho^{n-3}}^n) \\ & + (R_{\rho^2}^n R_{\rho^3}^n + R_{\rho^2}^n R_{\rho^5}^n + \dots + R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n) = \zeta_3, \\ & [R_1^n R_{\rho^2}^n + \dots + R_{\rho^{n-5}}^n R_{\rho^{n-3}}^n] - (R_{\rho^2}^n R_{\rho^3}^n + \dots + R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n)^2 = \zeta'_3 \end{aligned}$$

sont des nombres entiers connus.

Par conséquent

$$\begin{aligned} R_1^n R_{\rho^2}^n + R_1^n R_{\rho^4}^n + \dots + R_{\rho^{n-5}}^n R_{\rho^{n-3}}^n &= \frac{1}{2} (\zeta_3 + \sqrt{\zeta'_3}), \\ R_{\rho^2}^n R_{\rho^3}^n + \dots + R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n &= \frac{1}{2} (\zeta_3 - \sqrt{\zeta'_3}). \end{aligned}$$

De même on trouvera

$$\begin{aligned} R_1^n R_{\rho^2}^n R_{\rho^4}^n + \dots + R_{\rho^{n-7}}^n R_{\rho^{n-5}}^n R_{\rho^{n-3}}^n &= \frac{1}{2} (\zeta_4 + \sqrt{\zeta'_4}), \\ R_{\rho^2}^n R_{\rho^3}^n R_{\rho^5}^n + \dots + R_{\rho^{n-6}}^n R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n &= \frac{1}{2} (\zeta_4 - \sqrt{\zeta'_4}), \end{aligned}$$

D'où il est clair que la résolution de l'équation proposée dépend de deux équations suivantes

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} \xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2} (\zeta_2 + \sqrt{\zeta'_2}) \xi^{\frac{n-3}{2}} \\ + \frac{1}{2} (\zeta_3 + \sqrt{\zeta'_3}) \xi^{\frac{n-5}{2}} + \dots \pm \frac{1}{2^n} (\zeta_1 + \sqrt{\zeta'_1})^n = 0, \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} \xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2} (\zeta_2 - \sqrt{\zeta'_2}) \xi^{\frac{n-3}{2}} \\ + \frac{1}{2} (\zeta_3 - \sqrt{\zeta'_3}) \xi^{\frac{n-5}{2}} - \dots \pm \frac{1}{2^n} (\zeta_1 - \sqrt{\zeta'_1})^n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — Si l'équation irréductible de degré premier n , à coefficients entiers, est résoluble algébriquement, sa résolution dépend de l'équation du degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients sont des quantités de la forme

$$a + \sqrt{b},$$

où a et b sont des nombres entiers; ces nombres peuvent toujours être définis à l'aide du nombre fini d'opérations.

Application. — Si l'équation du cinquième degré est résoluble par radicaux, sa résolution dépend de deux équations du deuxième degré

$$\xi^2 - \frac{1}{2} (\zeta_2 + \sqrt{\zeta'_2}) \xi + \frac{1}{2^5} (\zeta_1 + \sqrt{\zeta'_1}) = 0,$$

$$\xi^2 - \frac{1}{2} (\zeta_2 - \sqrt{\zeta'_2}) \xi + \frac{1}{2^5} (\zeta_1 - \sqrt{\zeta'_1}) = 0.$$

Ici nous aurons

$$\zeta_1 = R_1 R_4 + R_2 R_3 = -5p \text{ (1)},$$

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= (R_1 R_4 - R_2 R_3)^2 \\ &= (\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3) (x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_0 x_3 + x_0 x_4 + x_1 x_2 \\ &\quad - x_1 x_3 - x_1 x_4 + x_2 x_3 - x_2 x_4 + x_3 x_4)^2 = 5J, \end{aligned}$$

où J est la fonction métacyclique connue de *Jacobi* (2). Le calcul de cette fonction a été l'objet des recherches de plusieurs auteurs.

Les fonctions

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= (R_1^5 + R_4^5) + (R_2^5 + R_3^5), \\ \zeta'_2 &= [(R_1^5 + R_4^5) + (R_2^5 + R_3^5)]^2 \end{aligned}$$

appartiennent aussi à la catégorie des fonctions métacycliques et peuvent être calculées comme la fonction de *Jacobi*.

Si l'équation du septième degré est résoluble par radicaux, sa résolution dépend des équations du troisième degré dont les coefficients peuvent être fournis de la même manière.

(1) *Bulletin des Sc. mathém.*, 2^e série, t. XVIII, p. 135.

(2) *Gesammelte Werke*, B. III, p. 276-278.

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + px^2 + q}}$,

(Bull. des Sciences math., 2^e série, t. XIX, 1895, pp. 76-84)

1. Dans le *Traité de Calcul intégral* de M. Bertrand l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + px^2 + q}}$$

est réduite à la catégorie des elliptiques ⁽¹⁾. De la manière même de la transformation et de ses résultats définitifs on voit que x^2 s'exprime par les fonctions elliptiques monodromes d'un certain argument. D'un autre côté, il est évident que l'intégrale

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + px^2 + q}}$$

a un point critique logarithmique à l'infini. Par conséquent, se présente évidemment la question : sous quelles conditions l'intégrale mentionnée s'exprime par des logarithmes. Pour résoudre cette question, présentons l'intégrale donnée sous la forme

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a)(x^2 - b)}}.$$

Nous avons

$$J = \int \frac{\sqrt{(x^2 - a)(x^2 - b)}}{\sqrt{[(x^2 - a)(x^2 - b)]^3}} dx.$$

Posons

$$x^2 - a = \frac{1}{y},$$

⁽¹⁾ P. 67.

alors

$$x^2 - b = \frac{(a-b)y+1}{y}, \quad dx = -\frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y^3} \sqrt{ay+1}},$$

$$(x^2 - a)(x^2 - b) = \frac{(a-b)y+1}{y^2}.$$

Par conséquent,

$$J = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{(a-b)y+1}}{y} \frac{dy}{\sqrt{(ay+1)^2[(a-b)y+1]^3}},$$

ou

$$J = -\frac{1}{2\sqrt{a^2(a-b)}} \int \frac{\sqrt{y+\frac{1}{a-b}}}{y} \frac{dy}{\sqrt{\left(y+\frac{1}{a}\right)^2\left(y+\frac{1}{a-b}\right)^3}},$$

ou

$$J = -\sqrt[4]{\frac{8}{3a^2(a-b)}} \int \frac{\sqrt{y+\beta}}{y} \frac{dy}{\sqrt{\frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a}.$$

En posant

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3}} = dz,$$

et en intégrant l'équation

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^4 = \frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3,$$

avec la condition que y a son infini pour $z = 0$, nous aurons

$$y = 6p^2z - \beta,$$

où pz est la fonction de Weierstrass avec les invariants

$$g^2 = \frac{2(\beta-\alpha)}{3}, \quad g_3 = 0.$$

Par cette raison

$$J = -\frac{2}{\sqrt{6a^2(a-b)}} \int \frac{\sqrt{6p^2z} dz}{6p^2z - \beta},$$

ou

$$J = - \frac{2}{\sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \int \frac{p dz}{p^2 z - \frac{\xi}{6}}.$$

Posons

$$\frac{\xi}{6} = p^2 z_0;$$

alors

$$\frac{p z}{p^2 z - p^2 z_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p z - p z_0} + \frac{1}{p z + p z_0} \right),$$

par conséquent

$$J = - \frac{1}{\sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \int \left(\frac{1}{p z - p z_0} + \frac{1}{p z + p z_0} \right) dz.$$

Nous avons

$$\frac{1}{p z - p z_0} = \frac{1}{p' z_0} [\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0) + 2\zeta(z_0)];$$

$$\frac{1}{p z + p z_0} = \frac{1}{p'(z_0 i)} [\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i) + 2\zeta(z_0 i)].$$

Suivant les formules connues d'homogénéité, nous avons

$$p'(z_0 i) = i p'(z_0),$$

$$\zeta(z_0 i) = -i \zeta(z_0),$$

donc

$$\frac{1}{p z + p z_0} = \frac{-i}{p' z_0} [\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i) - 2i \zeta(z_0)].$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{p z - p z_0} + \frac{1}{p z + p z_0} \\ = \frac{1}{p' z_0} \{ \zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0) - i [\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i)] \}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$J = - \frac{1}{p' z_0 \sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z + z_0 i)}{\sigma(z - z_0 i)} \right]^i \right\},$$

ou

$$J = - \frac{1}{p' z_0 \sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \log \frac{\sigma(z + z_0)}{\sigma(z - z_0)} + \frac{i}{p' z_0 \sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)}.$$

Calculons maintenant $p'z_0$. Nous avons

$$p'z = \sqrt{4p^3z - \frac{2}{3}(\beta - \alpha)pz}.$$

Et comme

$$\beta - \alpha = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a(a-b)},$$

$$p^2z_0 = \frac{\beta}{6} = \frac{1}{6(a-b)},$$

donc

$$p'z_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{6(a-b)}} \sqrt{\frac{2}{3(a-b)} - \frac{2b}{3a(a-b)}},$$

$$p'z_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{3^3a^2(a-b)}};$$

par conséquent,

$$\int = -\frac{1}{2} \log \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} + \frac{i}{2} \log \frac{\sigma(z-z_0i)}{\sigma(z+z_0i)}.$$

D'où il suit que l'intégrale donnée J ne s'exprime que par des logarithmes si z_0 est une partie commensurable d'une période.

2. Avant de réduire cette formule à une forme calculable considérons deux cas particuliers d'intégrabilité par des logarithmes; ces cas sont remarquables par leur simplicité.

1° Si $a = -b$, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a)(x^2-b)}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. Pour le prouver, remarquons que

$$p(2z_0) = -2pz_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{p'z_0}{p'z_0} \right)^2,$$

$$-2pz_0 = -\frac{2}{\sqrt{6(a-b)}},$$

$$p''z_0 = 6p^2z_0 - \frac{1}{2} g^2 = \frac{(3a-b)}{3a(a-b)},$$

$$p'z_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{3^3a^2(a-b)}};$$

donc

$$\left(\frac{p''z_0}{p'z_0}\right)^2 = \frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{3a(a-b)^2\sqrt{2}},$$

donc

$$p(2z_0) = -\frac{2}{\sqrt{6(a-b)}} + \frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{3a(a-b)^2\sqrt{2}}.$$

Si

$$a = -b,$$

nous aurons

$$p(2z_0) = -\frac{2}{2\sqrt{3a}} + \frac{4^2a^2\sqrt{6a}}{3.4^2a^3\sqrt{2}},$$

$$p(2z_0) = 0.$$

Par conséquent,

$$p'(2z_0) = 0,$$

d'où il suit que $2z_0$ est une demi-période ; donc

$$z_0 = \frac{2\pi}{4}.$$

Par cette raison, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - a^2}}$$

ou plus simplement l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 \pm 1}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes.

2° En résolvant l'équation transcendante

$$p(2z_0) = p(z_0),$$

nous trouvons

$$z_0 = \frac{2\pi}{3};$$

d'un autre côté, nous avons

$$-\frac{2}{\sqrt{6(a-b)}} + \frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{4.3a(a-b)^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6(a-b)}};$$

ou

$$\frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{4.3a(a-b)\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{6(a-b)}},$$

ou

$$\begin{aligned}(3a - b^2) &= 12a^2 - 12ab, \\ b &= -3a \pm 2a\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 - a)(x^2 + 3a \pm 2a\sqrt{3})}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. L'existence des autres cas d'intégrabilité par des logarithmes aurait pu être prouvée par des formules de multiplication de l'argument elliptique par un nombre entier.

3. Quand est donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 - a)(x^2 - b)}},$$

et qu'il faut résoudre la question : ne s'exprime-t-elle que par des logarithmes, on peut procéder de la manière suivante :

A l'aide des formules

$$\begin{aligned}pz_0 &= \frac{1}{\sqrt{6(a-b)}}, & g_2 &= \frac{2b}{3a(a-b)}, & g_3 &= 0, \\ p'z_0 &= \sqrt[4]{\frac{2}{3^3a^2(a-b)}},\end{aligned}$$

on peut calculer successivement

$$p(2z_0), \quad p(2^2z_0), \quad p(2^3z_0), \quad \dots$$

Si l'intégrale ne s'exprime que par des logarithmes, z_0 est une partie commensurable de la période ; alors la série

$$pz_0, \quad p(2z_0), \quad p(2^2z_0), \quad \dots$$

doit être périodique.

4. Montrons maintenant le moyen de calculer la formule

$$J = -\frac{1}{2} \log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} + \frac{i}{2} \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)}.$$

Citons deux formules connues

$$pz - pz_0 = - \frac{\sigma(z + z_0)\sigma(z - z_0)}{\sigma^2 z \sigma^2 z_0},$$

$$pz - p(z_0 i) = pz + pz_0 = - \frac{\sigma(z + z_0 i)\sigma(z - z_0 i)}{\sigma^2 z \sigma^2 z_0 i} \quad (1).$$

En profitant de ces formules, nous aurons

$$J = \frac{1}{2} \log(pz - pz_0) - \log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma z} - \frac{i}{2} \log(pz + pz_0) + i \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma z},$$

ou

$$J = \frac{1}{2} \log \frac{pz - pz_0}{(pz + pz_0)^i} - \log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma z} + i \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma z}.$$

Si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}$ est une partie commensurable d'une période

$$\log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma z} = - \frac{1}{m} \log \prod_{\mu=0}^{\mu=m-1} [p(z + \mu z_0) - pz_0]^{\mu-1},$$

$$\log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma z} = - \frac{1}{m} \log \prod_{\mu=0}^{\mu=m-1} [p(z + \mu z_0 i) + pz_0]^{\mu-1} \quad (2),$$

par cette raison

$$J = \frac{1}{2} \log \frac{pz - pz_0}{(pz + pz_0)^i} + \frac{1}{m} \prod_{\mu=0}^{\mu=m-1} \left\{ \frac{p(z + z_0 \mu) - pz_0}{[p(z + \mu z_0 i) + pz_0]^i} \right\}^{\mu-1},$$

où nous aurons pz de l'équation

$$y = 6p^2 z - \beta,$$

donc

$$pz = \sqrt{\frac{y + \beta}{6}},$$

ou

$$pz = \sqrt{\frac{1}{6(a-b)}} \sqrt{\frac{x^2 - b}{x^2 - a}} = pz_0 \sqrt{\frac{x^2 - b}{x^2 - a}}.$$

(1) HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 171.

(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XVII, p. 137.

Par conséquent

$$J = \frac{m-2}{2m} \log \frac{\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}} + 1\right)^i} + \frac{1}{m} \log \prod_{\mu=0}^{\mu=m-1} \left\{ \frac{p(z+\mu z_0) - pz_0}{[p(z+\mu z_0 i) + pz_0]^i} \right\}^{\mu-1}.$$

5. Si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{4}$, $m = 4$; alors

$$J = \frac{1}{4} \log \frac{\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}} + 1\right)^i} + \frac{1}{4} \log \frac{p(z+2z_0) - pz_0}{[p(z+2z_0 i) + pz_0]^i} \\ + \frac{1}{4} \log \left\{ \frac{p'(z+3z_0) - pz_0}{[p(z+2z_0 i) + pz_0]^i} \right\}^2.$$

Citons les formules connues

$$p(z+2z_0) = -pz - pz_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{p'z - p'2z_0}{pz - pz_0} \right)^2, \\ p(z+2z_0 i) = -pz + pz_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{p'z + ip'2z_0}{pz + pz_0} \right)^2, \\ p(z+3z_0) = -pz - pz_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{p'z + p'z_0}{pz - pz_0} \right)^2, \\ p(z+3z_0 i) = -pz + pz_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{p'z + ip'z_0}{pz + pz_0} \right)^2$$

Dans le cas actuel

$$a = -b = 1,$$

$$p(2z_0) = 0, \quad p'(2z_0) = 0, \quad pz_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad p'z_0 = \frac{1}{3}\sqrt[4]{3};$$

par conséquent,

$$p(z+2z_0) - pz_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} - 1 \right), \\ p(z+2z_0 i) + pz_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} + 1 \right),$$

et

$$p(z+3z_0) - pz_0 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{x\sqrt[4]{x^4-1} + x^2-1}{\sqrt{x^4-1} - x^2+1} \right)^2, \\ p(z+3z_0 i) + pz_0 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{x\sqrt[4]{x^4-1} + i(x^2-1)}{\sqrt{x^4-1} + x^2-1} \right]^2.$$

Par conséquent,

$$4 \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - 1}} = \log \frac{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} + 1\right)^i} + \log \frac{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} + 1\right)^i} \\ + 2 \log \frac{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} - 2 \left(\frac{x \sqrt[4]{x^4 - 1} + x^2 - 1}{\sqrt{x^4 - 1} - x^2 + 1} \right)^2 + 2}{\left\{ \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} - 2 \left[\frac{x \sqrt[4]{x^4 - 1} + i(x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - 1} + x^2 - 1} \right]^2 - 2 \right\}^i}$$

De même nous calculerons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 - a)(x^2 + 3a \pm 2a\sqrt{3})}}.$$

Ici nous avons $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{3}$; par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2 - a)(x^2 + 3a \pm 2a\sqrt{3})}} \\ = \frac{1}{6} \log \frac{\sqrt{\frac{x^2 - b}{x^2 - a}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{x^2 - b}{x^2 - a}} + 1\right)^i} + \frac{1}{3} \log \frac{p(z + 2z_0) - pz_0}{[p(z + 2z_0i) + pz_0]^i}.$$

Il reste à remplacer ici les symboles p par des quantités données.

**SUR LA DÉTERMINATION
DU GENRE D'UNE CERTAINE CATÉGORIE
D'INTÉGRALES ABÉLIENNES
ET QUELQUES APPLICATIONS**

(Bull. des Sc. math., 2^e série, t. XIX, 1895, pp. 272-82)

1. La détermination du genre des équations algébriques binomes est indiquée, d'une manière très détaillée, dans l'Ouvrage de MM. Appell et Goursat : *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, 1894 ⁽¹⁾. La règle de la détermination du genre est donnée, dans cet Ouvrage, après la formule de Riemann concernant toutes les équations algébriques dont les points critiques, ainsi que leur nature, sont connus d'avance. Il existe cependant une quantité de questions intéressantes pour la solution desquelles des recherches spéciales sont nécessaires indépendamment de la théorie générale de Riemann. Ces recherches sont indispensables dans tous les cas où il faut connaître non seulement le genre de l'intégrale abélienne, mais aussi où il faut déterminer toutes les intégrales de première espèce dépendant de l'équation algébrique binome donnée. Prenons l'intégrale

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda}}.$$

Remarquons d'abord qu'on peut toujours supposer

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = mk,$$

où k est un nombre entier ; en outre supposons toujours que

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

⁽¹⁾ P. 236-248.

sont tous inférieurs à m , car autrement J ne sera pas une intégrale de première espèce. Nommons I le genre de l'intégrale, le nombre des intégrales indépendantes de la forme

$$(1) \quad I_n = \int \frac{F(x)dx}{\sqrt[n]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda}} \\ n \leq m-1,$$

conservant une valeur finie sur toute la surface de la sphère.

Dans cette formule $F(x)$ est une fonction entière que nous pouvons disposer à volonté. Nous lui donnerons telle ou telle forme dans le but d'obtenir l'intégrale partout finie. Si, par exemple, il se trouve que

$$\alpha n = k_1 m + \alpha_1, \quad \beta n = k_2 m + \beta_1, \quad \gamma n = k_3 m + \gamma_1, \quad \dots,$$

où

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots,$$

sont tous moindres que m , nous avons

$$I_m = \int \frac{F(x)dx}{(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}(x-c)^{k_3} \dots \sqrt[n]{(x-a)^{\alpha_1} \dots (x-l)^{\lambda_1}}}.$$

Si l'on prend

$$F(x) = x^p(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}(x-c)^{k_3} \dots,$$

nous aurons

$$I_m = \int \frac{x^p dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\beta_1} \dots (x-l)^{\lambda_1}}}.$$

Il est clair que, donnant à p une valeur convenable, l'intégrale I_m conserve une valeur finie pour toute la surface de la sphère.

2. Nommons comme toujours par

$$E \frac{A}{B},$$

le plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{A}{B}$. Posons encore dans la formule (1)

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{\beta}{m} = \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots, \quad \frac{\lambda}{m} = \frac{p_i}{q_i};$$

$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_i}{q_i}$ sont des fractions irréductibles. Si $n = 1$ les inté-

grales indépendantes de la première espèce se déterminent par la formule

$$\int \frac{x^p dx}{\sqrt{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda}},$$

$$0 \leq p \leq k-2;$$

par conséquent, en nommant le nombre des intégrales indépendantes de la première espèce par

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_{m-1},$$

nous avons

$$N_1 = k - 1,$$

$$N_2 = 2k - 1 - E \frac{2p_1}{q_1} - E \frac{2p_2}{q_2} - \dots - E \frac{2p_i}{q_i},$$

$$N_3 = 3k - 1 - E \frac{3p_1}{q_1} - E \frac{3p_2}{q_2} - \dots - E \frac{3p_i}{q_i},$$

$$\dots \dots \dots$$

enfin

$$N_{m-1} = (m-1)k - 1 - E \frac{(m-1)p_1}{q_1} - E \frac{(m-1)p_2}{q_2} - \dots - E \frac{(m-1)p_i}{q_i}.$$

Par conséquent

$$(2) \quad N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \sum_{i=1}^i \sum_{l=1}^{l=m-1} E \frac{lp_i}{q_i}.$$

Calculons

$$S = \sum_{l=1}^{l=m-1} E \frac{lp_i}{q_i}.$$

Nous avons

$$\frac{p_i}{q_i} = E \frac{p_i}{q_i} + \frac{r_1}{q_i},$$

$$\frac{2p_i}{q_i} = E \frac{2p_i}{q_i} + \frac{r_2}{q_i},$$

$$\frac{3p_i}{q_i} = E \frac{3p_i}{q_i} + \frac{r_3}{q_i},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{(m-1)p_i}{q_i} = E \frac{(m-1)p_i}{q_i} + \frac{r_{m-1}}{q_i},$$

ou $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}$ sont les plus petits résidus positifs suivant le module q_i . Par conséquent

$$\frac{m(m-1)}{2} \frac{p_i}{q_i} = S + \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_{m-1}}{q_i};$$

en posant

$$m = q_i s_i,$$

nous avons

$$S = \frac{m}{2q_i} [(m-1)p_i - q_i + 1];$$

$$(3) \quad N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^k \frac{(m-1)p_i - q_i + 1}{q_i}.$$

La formule (3) détermine le genre de l'intégrale

$$I = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda}}.$$

3. *Exemple I.* — Définir le genre de l'intégrale

$$A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}} \quad (1).$$

Ici nous aurons

$$m = 6, \quad k = 1, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{6}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{2};$$

par conséquent

$$N = 10 - 3 \left(\frac{5-6+1}{6} + \frac{5-3+1}{3} + \frac{5-2+1}{2} \right) = 1.$$

Exemple II. — Définir le genre de l'intégrale

$$B = \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)(x-c)}} \quad (2).$$

Ici nous aurons

$$m = 4, \quad k = 1, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{4};$$

par conséquent

$$N = 3 - 2 \left(\frac{3-2+1}{2} + \frac{3-4+1}{4} + \frac{3-4+1}{4} \right) = 1.$$

Exemple III. — Définir le genre de l'intégrale

$$C = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^{m-\alpha}}}.$$

(1) APPELL et GOURSAT. *Théorie des fonctions algébriques, etc.*, p. 245.

(2) *Loc cit.*

Ici nous aurons

$$m = m, \quad k = 1, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{m - \alpha}{m},$$

$$N = \frac{(m - 1)(m - 2)}{2}$$

$$- \frac{m}{2} \left[\frac{(m - 1)\alpha - m + 1}{m} + \frac{(m - 1)(m - \alpha) - m + 1}{m} \right] = 0.$$

4. La méthode indiquée amène non seulement à la détermination du genre de l'intégrale, mais présente aussi le moyen pour obtenir toutes les intégrales indépendantes les plus simples de la première espèce, ce qui est indispensable dans tous les cas où, d'après la nature du problème, il faut faire *l'inversion* de l'intégrale. Pour expliquer la théorie, résolvons quelques problèmes qui par eux-mêmes ont un certain intérêt.

I. Trouver les conditions suivant lesquelles l'intégrale

$$A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x - a)(x - b)^2(x - c)^3}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. Le genre de l'intégrale, comme nous l'avons trouvé, est égal à l'unité; par conséquent l'intégrale est elliptique. Pour l'exprimer par les fonctions elliptiques de Weierstrass, il faut trouver l'argument de la première espèce. De toutes les intégrales du type

$$I_k = \int \frac{F(x)\partial x}{\sqrt[6]{[(x - a)(x - b)^2(x - c)^3]^k}},$$

il faut choisir l'intégrale conservant partout la valeur finie, c'est-à-dire n'ayant pas les points critiques logarithmiques. Il est facile de se convaincre que l'intégrale cherchée ne pourra être trouvée que dans le cas unique $k = 5$. Nous avons

$$I_5 = \int \frac{F(x)\partial x}{\sqrt[6]{(x - a)^5(x - b)^{10}(x - c)^{15}}},$$

ou

$$I_5 = \int \frac{F(x)\partial x}{(x - b)(x - c)^2 \sqrt[6]{(x - c)^3(x - b)^4(x - a)^5}}.$$

En prenant

$$Fx = (x - b)(x - c)^2,$$

nous aurons l'argument de la première espèce

$$I_3 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-c)^3 (x-b)^4 (x-a)^5}}.$$

Ayant cela en vue, présentons l'intégrale donnée sous la forme

$$A = \int \frac{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)}}{\sqrt[6]{(x-c)^3 (x-b)^4 (x-a)^5}} \partial x.$$

Posons

$$x - a = \frac{1}{y};$$

alors

$$A = - \int \frac{\sqrt[3]{(a-b)y+1} dy}{y \sqrt[6]{[(a-c)y+1]^3 [(a-b)y+1]^4}},$$

ou

$$A = - \frac{1}{\sqrt[6]{(a-b)^2 (a-c)^3}} \int \frac{\sqrt[3]{y+\beta} \partial y}{\sqrt[6]{(y+\alpha)^3 (y+\beta)^4}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-c}, \quad \beta = \frac{1}{a-b};$$

ou

$$A = - \sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3^5}{5 \cdot (a-b)^2 (a-c)^3}} \int \frac{\sqrt[3]{y+\beta}}{y \sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3^5}{5} (y+\alpha)^3 (y+\beta)^4}} \partial y.$$

Déterminons y par l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^6 = \frac{2^3 \cdot 3^5}{5} (y+\alpha)^3 (y+\beta)^4,$$

ainsi que par la condition que y a son infini pour $z = 0$. Il est facile de prouver par la substitution immédiate que

$$y = 120p^3z - \beta,$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{1}{30}(\beta - \alpha), \quad p'z = \sqrt{4p^3z - \frac{\beta - \alpha}{30}};$$

par conséquent

$$\sqrt[3]{y+\beta} = 2pz \sqrt[6]{3^2 \cdot 5^2},$$

donc

$$A = - \frac{1}{20} \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{(a-b)^2 (a-c)^3}} \int \frac{pzdz}{p^3z - p^3z_0},$$

$$p^3z_0 = \frac{\beta}{120},$$

donc

$$A = -\frac{1}{60p z_0 p' z_0} \sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{(a-b^2)(a-c)^3}} \log \left\{ \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \left[\frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)} \right]^{\alpha^2} \left[\frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)} \right]^{\alpha} \right\},$$

ou enfin

$$\begin{aligned} A &= -\log \left\{ \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \left[\frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)} \right]^{\alpha^2} \left[\frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)} \right]^{\alpha} \right\} \\ &= \log \left\{ (pz - pz_0) (pz - p\alpha z_0)^{\alpha^2} (pz - p\alpha^2 z_0)^{\alpha} \right\} \\ &\quad + \prod_{\rho=0}^{\rho=m-1} \left\{ [p(z - \rho z_0) - pz_0] \right. \\ &\quad \left. \times [p(z - \rho\alpha z_0) - p\alpha z_0]^{\alpha^2} [p(z - \rho\alpha^2 z_0) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha} \right\} \quad (1). \end{aligned}$$

Si $z_0 = \frac{2\pi}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale A s'exprime par des logarithmes.

5. II. Trouver les conditions où l'intégrale

$$B = \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)(x-c)^2}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. Le genre de l'intégrale, comme nous l'avons trouvé, est égal à l'unité; par conséquent l'intégrale est elliptique. Cherchons l'argument de la première espèce. Il est facile de se convaincre qu'il n'existe que l'intégrale unique

$$I_3 = \int \frac{F(x) \partial x}{\sqrt[4]{[(x-a)(x-b)x-c]^3}}$$

satisfaisant à la condition demandée. En prenant

$$F(x) = x - c,$$

nous aurons

$$I_3 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^2}}.$$

Présentons par conséquent B sous la forme

$$B = \int \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{\sqrt[4]{(x-c)^2(x-a)^3(x-b)^3}} \partial x$$

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre 1893.

En posant

$$x - a = \frac{1}{y},$$

nous avons

$$B = - \int \frac{\sqrt{(a-b)y + 1}}{y \sqrt{[(a-b)y + 1]^3 [(a-c)y + 1]^2}} dy,$$

ou

$$B = - \sqrt[4]{\frac{2^7}{3(a-b)(a-c)^2}} \int \frac{\sqrt{y + \beta}}{y \sqrt[4]{\frac{128}{3}(y + \alpha)^2 (y + \beta)^3}} dy.$$

Déterminons y par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^4 = \frac{128}{3} (y + \alpha)^2 (y + \beta)^3,$$

ainsi que par la condition que y a son infini pour $z = 0$. Alors

$$y = 6p^2z - \beta,$$

$$g_2 = \frac{2(\beta - \alpha)}{3}, \quad g_3 = 0,$$

$$p'z = \sqrt{4p^3z - \frac{2(\beta - \alpha)}{3}pz};$$

alors

$$B = - \sqrt[4]{\frac{2^9 \cdot 3^2}{3(a-b)(a-c)^2}} \int \frac{pz dz}{6p^2z - 6p^2z_0},$$

$$6p^2z_0 = \beta,$$

ou

$$B = -2 \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z + z_0 i)}{\sigma(z - z_0 i)} \right]^i \right\},$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Si z_0 est une partie commensurable de la période, l'intégrale

$$B = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)(x-c)^2}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes.

6. III. Parmi les nombreuses intégrales étudiées par Euler se trouve l'intégrale

$$\int X \frac{\partial x}{x},$$

où X est une fonction rationnelle de x^n et $\sqrt[n]{a + bx^n}$ ⁽¹⁾. L'intégrale la plus intéressante de ce type est

$$\int \frac{\partial z}{z \sqrt[n]{1 + z^n}}.$$

Par la substitution

$$z = \frac{1}{x},$$

cette intégrale se réduit à la forme

$$C = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{x^n + 1}}.$$

Posant ici

$$x^n = t,$$

nous aurons

$$C = \frac{1}{n} \int \frac{\partial t}{\sqrt[n]{t^{n-1}(1+t)}}.$$

Le genre de cette intégrale est égal à zéro (n° 3). Il est facile de la réduire aux logarithmes. En effet

$$C = \frac{1}{n} \int \sqrt[n]{\frac{t}{1+t}} \frac{\partial t}{t}.$$

En posant

$$\sqrt[n]{\frac{t}{1+t}} = u,$$

nous avons

$$t = \frac{u^n}{u^n - 1},$$

$$C = \int \frac{\partial u}{u(u^n - 1)}.$$

7. IV. Dans les exemples suivants, avant de traiter le genre de l'intégrale il faut faire la substitution. Prenons l'intégrale

$$D = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x^3 - a)(x^3 - b)}}.$$

(1) *Instit. Calculi integr.*, Vol. quartum, p. 12-14; Petropoli, 1845.

Posons

$$x^3 = y;$$

nous aurons

$$D = \frac{1}{3} \int \frac{\partial y}{\sqrt[3]{y^2(y-a)(y-b)}}.$$

Si l'on pose

$$y = \alpha + \frac{1}{z},$$

l'intégrale se réduira à la forme

$$D_1 = \int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^2(z+m)^2(z+n)(z+p)}}.$$

Une autre intégrale indépendante de la première espèce sera

$$D_2 = \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z(z+m)(z+n)^2(z+p)^2}}.$$

Ainsi l'intégrale traitée est du second genre ; par conséquent elle ne peut être réduite aux elliptiques.

V. Examinons le genre de l'intégrale

$$E = \int \frac{x \partial x}{\sqrt[4]{(x^4-a)(x^4-b)}}.$$

En posant

$$x^4 = t,$$

nous avons

$$E = \frac{1}{4} \int \frac{\partial t}{\sqrt[4]{t^2(t-a)(t-b)}};$$

le genre de l'intégrale est égal à l'unité ; l'intégrale s'exprime par des fonctions elliptiques.

Les exemples cités expliquent suffisamment l'esprit de la méthode.

**SUR LA RÉDUCTION
DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DÉPENDANT
D'UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE BINOME**

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XX, 1896, pp. 156-184)

1. On connaît plusieurs exemples de réduction des intégrales abéliennes de la forme

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda}}$$

aux intégrales elliptiques. Mais ces exemples sont isolés, n'étant liés par aucune idée générale, et la réduction même est basée sur des substitutions accidentelles, n'ayant d'autre raison d'être qu'un simple hasard. Comme sur un exemple d'une résolution imparfaite de cette question, citons l'intégrale

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^6 + 1}},$$

proposée par Serret dans le *Cours de Calcul intégral*, 1868, p. 65. Cette intégrale est réduite aux elliptiques moyennant une substitution irrationnelle, tandis que l'intégrale

$$w = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3 + a)(x^3 + b)}},$$

presque tout à fait pareille à v ne peut être réduite aux elliptiques par aucune substitution possible. Les autres cas connus de la réduction des intégrales du type J ne sont pas importants à cause de leur simplicité et par le caractère accidentel des méthodes de réduction. En outre, pas une des méthodes ordinaires n'offre les moyens pour découvrir de nouvelles intégrales réductibles. Enfin,

la classification admise des intégrales abéliennes J nous semble imparfaite.

A la suite de cette imperfection les intégrales, appartenant, sans aucun doute, au même genre, sont traitées comme différentes. Nous nous convaincront bientôt de la vérité de cette remarque. Pour donner un critère possible de la réductibilité des intégrales J, ainsi que les conditions par lesquelles on pourrait juger que plusieurs intégrales différentes appartiennent au même genre, il faudrait faire une nouvelle définition concrète du genre de l'intégrale J, définition entièrement indépendante de la théorie générale de Riemann.

Après l'intégrale donnée

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda}},$$

composons l'intégrale

$$A = \int \frac{x^p F(x) \partial x}{\sqrt[q]{[(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda]^q}},$$

où

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = jm,$$

$$q = 1, 2, 3, \dots, m-1,$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, j-2;$$

$F(x)$ est une fonction entière de la forme

$$F(x) = (x-a)^{a_1} (x-b)^{b_1} \dots (x-l)^{l_1},$$

prise de façon que l'intégrale A n'ait pas de points critiques logarithmiques à une distance finie. Nous nommerons *genre de l'intégrale J* le nombre des intégrales du type A conservant une valeur finie sur toute la surface de la sphère. Par exemple, définissons le genre de l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}},$$

dont nous aurons besoin dans la suite. Formons la formule

$$A^q = \int \frac{x^p F(x) \partial x}{\sqrt[q]{[(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2]^q}}.$$

Après cette formule, nous aurons :

1° Pour $q = 1$

$$F(x) = 1, \quad p = 0,$$

$$A_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}};$$

2° Pour $q = 2$

$$F(x) = 1, \quad p = 0,$$

$$A_2 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}};$$

3° Pour $q = 3$

$$F(x) = (x-c)(x-d), \quad p = 0,$$

$$A_3 = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}};$$

4° Pour $q = 4$

$$F(x) = (x-c)(x-d), \quad p = 0,$$

$$A_4 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)(x-d)}};$$

5° Pour $q = 5$

$$F(x) = (x-c)(x-d), \quad p = 0, \quad 1,$$

$$A'_5 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^5(x-b)^5(x-c)^4(x-d)^4}};$$

$$A'_6 = \int \frac{x \partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^5(x-b)^5(x-c)^4(x-d)^4}}.$$

Les résultats obtenus se trouvent dans le Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	L'exposant de $x - d$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	6	1	1	2	2	0
2	3	1	1	2	2	1
3		1	1	0	0	0
4	3	2	2	1	1	1
5	6	5	5	5	4	2

Le genre de l'intégrale est défini par le nombre 4 et se caractérise par quatre intégrales de la première espèce. Nous nommerons les intégrales de la première espèce, appartenant au même genre, *intégrales conjuguées*. En outre, l'intégrale de la troisième espèce

$$A_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}}$$

appartient au même genre. Parmi les six intégrales obtenues

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_5, \quad A_6,$$

il y en a trois

$$A_1, \quad A_5, \quad A_6,$$

qui dépendent du radical du sixième degré. Nous nommerons ces intégrales *caractéristiques*. Deux intégrales

$$A_2, \quad A_4$$

dépendent de l'exposant trois; nous les désignerons comme *non caractéristiques*.

Il est facile de prouver que les intégrales non caractéristiques forment un groupe complet du genre deux. Le lien entre les intégrales caractéristiques et non caractéristiques n'est fondé que sur la combinaison donnée des exposants sur

$$(x-a), \quad (x-b), \quad (x-c), \quad (x-d).$$

On peut s'attendre que ce lien pourra être détruit à la suite de quelques substitutions, et alors le genre des intégrales caractéristiques sera diminué de deux unités. Nous verrons dans la suite que les intégrales caractéristiques sont toutes réduites aux elliptiques au moyen d'une seule et même substitution. Pour éclaircir la question très importante de l'influence des substitutions rationnelles sur l'altération du genre de l'intégrale abélienne, considérons un exemple assez compliqué et typique. Étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{(x-a)^7(x-b)^7(x-c)^{10}}},$$

ou plus simplement

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{10}(x-a)^7(x-b)^7}}.$$

Le genre de cette intégrale, d'après la formule générale de Riemann, est égal à onze. En appliquant à l'intégrale donnée notre méthode de la détermination du genre, formons le Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de x	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	24	10	7	7	0
2	12	10	7	7	1
3	8	2	7	7	1
4	6	4	1	1	0
5	24	2	11	11	0
6	4	2	3	3	1
7	24	22	1	1	0
8	3	1	1	1	0
9	8	6	5	5	1
10	12	2	11	11	1
11	24	14	5	5	0
12	2	0	1	1	0
13	24	10	19	19	1
14	12	10	1	1	0
15	8	2	3	3	0
16	3	2	2	2	1
17	24	2	23	23	1
18	4	2	1	1	0
19	24	22	13	13	1
20	6	2	5	5	1
21	8	6	1	1	0
22	12	2	5	5	1
23	24	14	17	17	1

Nous avons obtenu onze intégrales de la première espèce dont quatre seulement

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{10} (x + a)^{19} (x + b)^{19}}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^2 (x + a)^{23} (x + b)^{23}}},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{22} (x + a)^{13} (x + b)^{13}}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{14} (x + a)^{17} (x + b)^{17}}}$$

sont caractéristiques. Les intégrales non caractéristiques consistent dans deux groupes.

I. *Groupe du genre cinq.* — Consiste dans cinq intégrales conjuguées :

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{x^{10} (x+a)^7 (x+b)^7}}, & \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{x^2 (x+a)^{11} (x+b)^{11}}}, \\ \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{x^2 (x+a)^5 (x+b)^5}}, & \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^2 (x+a)^2 (x+b)^2}}, \\ & \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^2 (x+a)^3 (x+b)^3}}, \end{aligned}$$

II. *Groupe du genre trois.* — Consiste dans trois intégrales conjuguées :

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{x^2 (x+a)^7 (x+b)^7}}, & \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{x^6 (x+a)^5 (x+b)^5}}, \\ & \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^2 (x+a)^3 (x+b)^3}}. \end{aligned}$$

Les deux groupes non caractéristiques ont une intégrale conjuguée commune

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^2 (x+a)^3 (x+b)^3}}.$$

On peut s'attendre qu'à la suite d'une substitution simplement rationnelle le lien entre les intégrales caractéristiques et le groupe du genre cinq sera détruit; dans ce cas le genre de l'intégrale donnée diminuera de cinq unités. On peut s'attendre de même qu'à la suite d'une substitution simplement rationnelle le lien entre les intégrales caractéristiques et le groupe du genre trois se détruira aussi; dans ce cas le genre de l'intégrale donnée diminuera de trois unités.

En ayant, au lieu de l'intégrale donnée, une autre du même genre

$$A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{(x+a)^{19} (x+b)^{19}}},$$

cette intégrale ne diffère de l'intégrale donnée qu'en ce que pour

l'intégrale nouvelle l'infini est un point de ramification et zéro un point ordinaire. Il est évident que

$$A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{\left[\left(x + \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^{19}}}.$$

En posant

$$\left(x + \frac{a+b}{2}\right)^2 = t,$$

nous aurons

$$A = \int \frac{\partial t}{\sqrt[24]{t^{12} \left[t - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^{19}}}.$$

Moyennant une substitution linéaire cette intégrale peut être remplacée par une nouvelle intégrale

$$B = \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{12}(x+a)^{19}(x+b)^{17}}},$$

pour laquelle l'infini n'est pas un point de ramification. Le genre de cette intégrale est égal à six. A la suite de cette même substitution le genre de toutes les intégrales caractéristiques est diminué jusqu'à six. Cet exemple explique suffisamment le rôle de la substitution simplement rationnelle dans l'altération du genre des intégrales abéliennes du type donné. Comme application, nous présenterons la théorie presque complète de la réduction des intégrales abéliennes du type

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x+a)^\alpha (x+b)^\beta (x+c)^\gamma}},$$

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{m},$$

pour trois cas bien simples :

$$m = 6, \quad m = 12, \quad m = 8.$$

3. Considérons d'abord le cas où $m = 6$. Dans ce cas deux suppositions sont seules possibles :

$$\alpha + \beta + \gamma = 6,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 12.$$

Ces équations n'ont que six solutions entières et positives

(1)	$\alpha = 1,$	$\beta = 2,$	$\gamma = 3,$
(2)	$\alpha = 2,$	$\beta = 2,$	$\gamma = 2,$
(3)	$\alpha = 1,$	$\beta = 1,$	$\gamma = 4,$
(4)	$\alpha = 3,$	$\beta = 4,$	$\gamma = 5,$
(5)	$\alpha = 4,$	$\beta = 4,$	$\gamma = 4,$
(6)	$\alpha = 2,$	$\beta = 5,$	$\gamma = 5.$

Les combinaisons (1), (2), (4), (5) amènent aux intégrales elliptiques. Les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

appartiennent au même genre ; de même les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)}}$$

appartiennent au même genre. Par conséquent, nous devons nous occuper des intégrales

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^2(x-b)^5(x-c)^5}},$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}}.$$

La détermination du genre de ces intégrales amène au Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	6	2	5	5	1
2	3	2	2	2	1
3	2	0	1	1	0
4	3	1	1	1	0
5	6	4	1	1	0

L'intégrale mentionnée appartient au genre deux. A ce genre appartiennent deux intégrales caractéristiques. Conjuguée à l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^2 (x-b)^5 (x-c)^5}},$$

se trouve l'intégrale non caractéristique

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}},$$

du genre un et de première espèce. Il est naturel, par conséquent, de chercher une substitution simplement rationnelle sous l'influence de laquelle le lien entre les intégrales

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^2 (x-b)^5 (x-c)^5}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}},$$

sera détruit. Comme suite de cette altération nous aurons la réduction de l'intégrale J_1 au genre un, c'est-à-dire aux intégrales elliptiques.

Posons

$$x - a = \frac{1}{z},$$

alors

$$J_1 = - \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{[(a-b)z+1]^5 [(a-c)z+1]^5}},$$

ou

$$J_1 = - \sqrt[6]{\alpha^5 \beta^5} \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{\left[z + \frac{\alpha + \beta}{2}\right]^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2}^5},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-b}, \quad \beta = \frac{1}{a-c}.$$

En posant

$$\left(z + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = t,$$

nous avons

$$J_1 = - \frac{\sqrt[6]{\alpha^5 \beta^5}}{2} \int \frac{\partial t}{\sqrt[6]{t^3 \left[t - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2\right]^5}}.$$

L'intégrale obtenue, comme on sait, appartient à la catégorie des elliptiques. La réduction de l'intégrale J_1 aux elliptiques peut être obtenue encore par un procédé qui s'emploie souvent avec succès. Nous avons

$$J_1 = -\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5} \int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(z+\alpha)^2(z+\beta)^2}} \frac{1}{\sqrt[6]{(z+\alpha)(z+\beta)}}.$$

En posant

$$\frac{\partial z}{\sqrt[3]{(z+\alpha)(z+\beta)^2}} = d\xi,$$

nous obtiendrons

$$\sqrt[3]{(z+\alpha)(z+\beta)} = 9p(\xi) \quad (1),$$

où $p(\xi)$ est une fonction de Weierstrass avec les invariants

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\left(\frac{\alpha-\beta}{27}\right)^2.$$

Par conséquent

$$J_1 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5}}{3} \int \frac{\partial \xi}{\sqrt{p(\xi)}}.$$

En posant

$$p(\xi) = t,$$

nous aurons

$$J_1 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5}}{3} \int \frac{\partial t}{\sqrt{4t^3 + \left(\frac{\alpha-\beta}{27}\right)^2 t}}.$$

A la catégorie mentionnée, appartient l'intégrale citée dans l'ouvrage de Serret ⁽²⁾, et sa réduction aux intégrales elliptiques ne présente aucune difficulté. Soit donnée

$$V = \int \frac{\partial x}{\sqrt{x^6 + 1}}.$$

Posons

$$x^6 = z;$$

alors

$$V = \frac{1}{6} \int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^5(z+1)^2}}.$$

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XVII, mai 1893.

⁽²⁾ P. 65

Posons encore

$$z + 1 = \frac{1}{t},$$

alors

$$V = -\frac{1}{6} \int \frac{\partial t}{\sqrt[6]{t^5(1-t)^5}},$$

et cette intégrale, comme nous venons de le prouver, peut se réduire à la forme

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^5}},$$

ou à la forme

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^4 - ax}}$$

A cette dernière forme, l'intégrale ci-dessus se réduit dans l'ouvrage de Serret.

4. La réduction de l'intégrale

$$J_3 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}},$$

aux elliptiques peut être adaptée à la résolution du problème suivant :

PROBLÈME. — *Trouver les conditions pour que l'intégrale*

$$J_3 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Posons d'abord

$$x - a = \frac{1}{z},$$

alors

$$J_3 = -\sqrt[6]{\alpha\beta} \int \frac{\partial z}{z \sqrt[6]{(z+\alpha)(z+\beta)}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-b}, \quad \beta = \frac{1}{a-b}.$$

En posant maintenant

$$\left(z + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = t,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} J_3 = & -\frac{\sqrt[6]{\alpha\beta}}{2} \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2\right] \sqrt[6]{t - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2}} \\ & + \frac{\alpha + \beta}{4} \sqrt[6]{\alpha\beta} \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2\right] \sqrt[6]{t^3 \left[t - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2\right]}}. \end{aligned}$$

La première des intégrales obtenues

$$N_1 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha\beta}}{2} \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2\right] \sqrt[6]{t - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2}}$$

se réduit immédiatement aux logarithmes, et la seconde

$$N_2 = \frac{\alpha + \beta}{4} \sqrt[6]{\alpha\beta} \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2\right] \sqrt[6]{t^3 \left[t - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2\right]}}$$

est elliptique. Si

$$\alpha + \beta = 0,$$

c'est-à-dire

$$a = \frac{b + c}{2},$$

l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x - a)^4 (x - b) (x - c)}}$$

se réduit aux logarithmes. Ce résultat ne donne rien de nouveau, car dans le cas donné J_3 se réduit à la forme

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{x^4 (x^2 - a)}}$$

et cette intégrale s'exprime facilement par des logarithmes par la substitution ordinaire

$$x^2 = z.$$

Pour trouver les conditions générales d'exprimabilité par des logarithmes l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4 (x-b) (x-c)}}.$$

il faut exprimer

$$N_2 = \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \right] \sqrt[6]{t^3 \left[t - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \right]}}.$$

par les fonctions elliptiques de Weierstrass.

Posons, pour abréger,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = r, \quad \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 = q;$$

nous avons

$$N_2 = \int \frac{\partial x}{(x-r) \sqrt[6]{x^3(x-q)}}.$$

En posant

$$x - q = \frac{1}{z}.$$

nous avons

$$N_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{q}} \int \frac{\sqrt[3]{z} \partial z}{[(q-r)z + 1] \sqrt[6]{\left(z + \frac{1}{q}\right)^3 z^4}}.$$

En posant ici

$$\frac{\partial z}{\sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3^5}{5} \left(z + \frac{1}{q}\right)^3 z^4}} = dt,$$

et en exprimant z par l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^6 = \frac{2^3 \cdot 3^5}{5} \left(z + \frac{1}{q} \right)^3 z^4,$$

ainsi que par la condition que z a son infini pour $t = 0$, nous obtiendrons ⁽¹⁾

$$z = 120 p^3(t),$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\frac{1}{30q},$$

$$p'(t) = \sqrt[3]{4p^3(t) + \frac{1}{30q}};$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{6}}{\alpha\beta(\alpha - \beta)\sqrt{5}} \int \frac{p t dt}{p^3 t - \frac{1}{120\alpha\beta}}.$$

En posant ici

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{15\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{15}} = p(t_0)$$

et en répétant les raisonnements que nous avons déjà employés plusieurs fois, on peut formuler le théorème suivant :

Soient donnés

$$p(t_0) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{(a-b)(a-c)}{15}}.$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\frac{2}{15} \frac{(a-b)^2(a-c)^2}{(b-c)^2}.$$

Si $t_0 = \frac{2\pi}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}}$$

se réduit aux logarithmes.

Exemple. — Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}},$$

où

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -7 \pm 4\sqrt{3}.$$

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XVII, p. 137.

Nous avons

$$p(t_0) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{c}{15}}, \quad g_3 = -\frac{2}{15} \left(\frac{c}{1-c} \right)^2,$$

$$p'(t_0) = \sqrt{\frac{c}{30} \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^2}.$$

Après la formule de la duplication de l'argument nous avons

$$p(2t_0) = -2p(t_0) + \frac{1}{4} \left(\frac{6p^2 t_0}{p' t_0} \right)^2,$$

ou

$$p(2t_0) = -\sqrt[3]{\frac{c}{15}} + \frac{9}{8} \left(\frac{1-c}{1+c} \right)^2 \sqrt[3]{\frac{c}{15}},$$

ou

$$p(2t_0) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{c}{15}},$$

c'est-à-dire

$$p(2t_0) = p(t_0);$$

par conséquent

$$t_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{3};$$

par conséquent l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^4(x-1)(x+7 \pm 4\sqrt{3})}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes.

5. Étudions maintenant en détail les intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma}},$$

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{12}.$$

Deux suppositions seules sont possibles

$$\alpha + \beta + \gamma = 12,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 24.$$

Ces deux suppositions amènent évidemment à une seule relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 24;$$

car les intégrales satisfaisant à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 12$$

sont des intégrales de la troisième espèce avec le point critique logarithmique à l'infini.

Toutes ces intégrales dépendent, comme nous le verrons, des arguments de la première espèce satisfaisant à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 24.$$

Ne désirant pas entrer ici dans des détails concernant peu la question et ne présentant point d'intérêt, disons simplement que le type des intégrales mentionnées se réduit aux cinq suppositions suivantes :

(1)	$\alpha = 10,$	$\beta = 7,$	$\gamma = 7,$
(2)	$\alpha = 6,$	$\beta = 7,$	$\gamma = 11,$
(3)	$\alpha = 7,$	$\beta = 8,$	$\gamma = 9,$
(4)	$\alpha = 5,$	$\beta = 8,$	$\gamma = 11,$
(5)	$\alpha = 5,$	$\beta = 9,$	$\gamma = 10.$

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)^7(x-c)^7}}$$

amène au Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	12	10	7	7	1
2	6	4	1	1	0
3	4	2	3	3	1
4	3	1	1	1	0
5	12	2	11	11	1
6	2	0	1	1	0
7	12	10	1	1	0
8	3	2	2	2	1
9	4	2	1	1	0
10	6	2	5	5	1
11	12	2	5	5	0

On voit, d'après le Tableau, que l'intégrale appartient au genre cinq. Le genre mentionné se distingue par deux intégrales carac-

téristiques de la première espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)^7(x-c)^7}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^2(x-b)^{11}(x-c)^{11}}},$$

et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)(x-c)}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^2(x-b)^5(x-c)^5}}.$$

La réduction de toutes ces quatre intégrales sera faite en même temps et au moyen des mêmes substitutions simplement rationnelles.

Pour se rendre compte quelle influence doivent avoir les substitutions simplement rationnelles pour diminuer le genre des intégrales caractéristiques, revenons au Tableau. On voit qu'en conjonction avec les intégrales données se trouve le groupe des intégrales du genre deux :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

La substitution rationnelle doit détruire cette conjonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué de deux unités. On peut évidemment donner à l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)^7(x-c)^7}}$$

la forme suivante

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x+\alpha)^7(x+\beta)^7}};$$

maintenant l'infini est un point de ramification. Nous avons

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{\left[\left(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2\right]^7}}.$$

En posant

$$\left(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = t,$$

nous obtiendrons

$$J_1 = \int \frac{dt}{\sqrt[12]{t^6 \left[t - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \right]^7}}.$$

En faisant l'infini un point ordinaire, nous amenons l'intégrale donnée à la forme

$$J_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}.$$

Les autres intégrales caractéristiques sont réduites conformément à la forme suivante :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)(x-c)^5}}.$$

6. Analysons l'intégrale

$$J_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}.$$

L'analyse de cette intégrale amène au Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	12	6	7	11	1
2	6	0	1	5	0
3	4	2	3	3	1
4	3	0	1	2	0
5	12	6	11	7	1
6	2	0	1	1	0
7	12	6	1	5	0
8	3	0	2	2	0
9	4	2	1	1	0
10	6	0	5	1	0
11	12	6	5	1	0

Ainsi, l'intégrale donnée du genre cinq est réduite à l'intégrale du genre trois, comme il fallait le prévoir. Ce nouveau genre se

distingue par deux intégrales caractéristiques de la première espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[1]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[1]{(x-a)^6(x-b)^{11}(x-c)^7}},$$

et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[1]{(x-a)^6(x-b)^3(x-c)^5}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[1]{(x-a)^6(x-b)^5(x-c)^3}}.$$

En conjonction avec ces intégrales se trouvent les intégrales du genre un

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)(x-c)^3}}.$$

Si nous trouvons une substitution simplement rationnelle qui va détruire cette conjonction, nous amènerons l'intégrale étudiée ou au genre deux, ou au genre un. On peut évidemment réduire l'intégrale donnée à la forme

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[1]{(x+a)^6x^7}},$$

En posant

$$x = t^3,$$

nous aurons

$$J = 3 \int \frac{tdt}{\sqrt[1]{(t^3+a)^6t^9}},$$

$$J = 3 \int \frac{tdt}{\sqrt[4]{(t^3+a)^2t^3}},$$

$$J = 3 \int \frac{tdt}{\sqrt[4]{(t^3+a)^2t^3}}.$$

Il suffit de se borner à l'intégrale

$$J = \int \frac{x \partial x}{\sqrt[4]{(x^3-1)^2x^3}}$$

ou

$$J = \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x-1)^2(x^2+x+1)^2x^3}}.$$

Supposons maintenant

$$x - 1 = \frac{1}{z},$$

alors

$$J = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{(1+z)dz}{\sqrt{(z^2+z+\frac{1}{3})^2 (z^2+z)^3}},$$

ou

$$J = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{(1+z)dz}{\sqrt{[(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}]^2 [(z+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]^3}}.$$

En posant

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \zeta,$$

nous avons

$$J = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2(\zeta + \frac{1}{12})^2 (\zeta - \frac{1}{4})^3}} \\ - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta + \frac{1}{12})^2 (\zeta - \frac{1}{4})^3}},$$

Le problème est réduit aux deux intégrales de la première espèce

$$M_1 = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2(\zeta + \frac{1}{12})^2 (\zeta - \frac{1}{4})^3}}, \\ M_2 = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta + \frac{1}{12})^2 (\zeta - \frac{1}{4})^3}}.$$

L'intégrale M_2 est elliptique et M_1 est une intégrale du genre deux. Ainsi, toutes les intégrales caractéristiques pour la combinaison

$$\alpha = 10, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 7$$

sont réduites finalement au genre deux.

Les intégrales caractéristiques pour la combinaison

$$\alpha = 6, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 11$$

sont aussi réduites au genre deux.

7. Considérons maintenant la combinaison

$$\alpha = 7, \quad \beta = 8, \quad \gamma = 9.$$

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^7 (x-b)^8 (x-c)^9}},$$

amène au Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	12	7	8	9	1
2	6	1	2	3	0
3	4	3	0	1	0
4	3	1	2	0	0
5	12	11	4	9	1
6	2	1	0	1	0
7	12	1	8	3	0
8	3	2	1	0	0
9	4	1	0	3	0
10	6	5	4	3	1
11	12	5	4	3	0

On voit, d'après le tableau, que l'intégrale appartient au genre trois. Le genre mentionné se distingue par deux intégrales caractéristiques de la première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^7 (x-b)^8 (x-c)^9}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^{11} (x-b)^4 (x-c)^9}},$$

et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a) (x-b)^8 (x-c)^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^5 (x-b)^4 (x-c)^3}},$$

On voit qu'en conjonction avec les intégrales données se trouve l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^5 (x-b)^4 (x-c)^3}}.$$

La substitution simplement rationnelle doit détruire cette conjonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué.

Il suffit de se borner à l'intégrale

$$S = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-1)^9 x^7}}.$$

Posons

$$x = t^3 ;$$

alors

$$S = 3 \int \frac{t dt}{\sqrt[4]{(t^3-1)^3 t^3}},$$

ou

$$S = 3 \int \frac{t dt}{\sqrt[4]{(t^2+t+1)^3 (t^2-t)^3}}.$$

Posons

$$t = \frac{m\xi + n}{1 + \xi},$$

où m, n satisfont aux conditions

$$2mn + (m + n) + 2 = 0,$$

$$2mn - (m + n) = 0.$$

Nous aurons

$$S = 3(m+n) \int \frac{(m\xi + n) d\xi}{\sqrt[4]{[(m^2+m+1)\xi^2+n^2+n+1]^3 [(m^2-m)\xi^2+n^2-n]^3}}.$$

En posant enfin

$$\xi^2 = z,$$

nous réduirons S aux deux intégrales elliptiques

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(z+\alpha)^3 (z+\beta)^3}}, \quad \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^2(z+\alpha)^3 (z+\beta)^3}},$$

8. Considérons maintenant la combinaison

$$\alpha = 5, \quad \beta = 8, \quad \gamma = 11.$$

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^5 (x-b)^8 (x-c)^{11}}}$$

amène au Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	12	5	8	11	1
2	6	5	2	5	1
3	4	1	0	3	0
4	3	2	2	2	1
5	12	1	4	7	0
6	2	1	0	1	0
7	12	11	8	5	1
8	3	1	1	1	0
9	4	3	0	1	0
10	6	1	4	1	0
11	12	7	4	1	0

On voit d'après le Tableau, que l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^5 (x-b)^8 (x-c)^{11}}}$$

appartient au genre quatre. Le genre mentionné se distingue par deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^5 (x-b)^8 (x-c)^{11}}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^{11} (x-b)^8 (x-c)^5}},$$

de la première espèce et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a) (x-b)^4 (x-c)^7}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^7 (x-b)^4 (x-c)}}.$$

On voit qu'en conjonction avec les intégrales données, se trouve le groupe complet du genre deux

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^5 (x-b)^2 (x-c)^5}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}.$$

La substitution simplement rationnelle doit détruire cette conjonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué de deux unités.

Il suffit de considérer l'intégrale

$$S = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^8 x^5}}.$$

Supposons

$$x = t^2;$$

alors

$$S = 2 \int \frac{t dt}{\sqrt[6]{(t^2-a)^4 t^5}}.$$

En posant

$$t = \frac{1+y}{y},$$

nous aurons

$$S = -2 \int \frac{(1+y) \partial y}{\sqrt[6]{[(1-a)y^2 + 2y + 1]^4 (y^2 + y)^5}}.$$

Ainsi, pour résoudre le problème, nous aurons l'intégrale

$$J = \int \frac{(x+a) \partial x}{\sqrt[6]{(x^2 + px + q)^4 (x^2 + rx + s)^5}}.$$

En employant la substitution

$$x = \frac{\alpha z + \beta}{1+z},$$

où α, β satisfont aux conditions

$$2\alpha\beta + p(\alpha + \beta) + 2q = 0,$$

$$2\alpha\beta + r(\alpha + \beta) + 2s = 0,$$

nous réduirons l'intégrale donnée à la forme

$$J = \int \frac{(Az + B) \partial z}{\sqrt[6]{(z^2 + m)^4 (z^2 + n)^5}}.$$

En posant, enfin

$$z^2 = \zeta,$$

nous aurons définitivement

$$J = \frac{A}{2} \int \frac{\partial \zeta}{\sqrt[6]{(\zeta + m)^4 (\zeta + n)^5}} + \frac{B}{2} \int \frac{\partial \zeta}{\sqrt[6]{\zeta^3 (\zeta + m)^4 (\zeta + n)^5}}.$$

Ainsi, l'intégrale donnée est réduite aux elliptiques.

9. Considérons, enfin, l'intégrale abélienne de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma}}.$$

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{8}.$$

Deux suppositions seules sont possibles

$$\alpha + \beta + \gamma = 16,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 8.$$

Ces deux suppositions amènent évidemment à une seule relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 8.$$

et nous aurons les trois suppositions suivantes :

- | | | | |
|-----|---------------|--------------|---------------|
| (1) | $\alpha = 1,$ | $\beta = 1,$ | $\gamma = 6,$ |
| (2) | $\alpha = 1,$ | $\beta = 2,$ | $\gamma = 5,$ |
| (3) | $\alpha = 1,$ | $\beta = 3,$ | $\gamma = 4,$ |

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^5}}.$$

amène au Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	8	1	2	5	0
2	4	1	2	1	0
3	8	3	6	7	1
4	2	1	0	1	0
5	8	5	2	1	0
6	4	3	2	3	1
7	8	7	6	3	1

On voit, d'après le Tableau, que l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^5}}$$

appartient au genre trois. Le genre mentionné se distingue par deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^3(x-b)^6(x-c)^7}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^7(x-b)^6(x-c)^3}}$$

de la première espèce et par deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^5}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^5(x-b)^2(x-c)}}$$

de la troisième espèce. On voit qu'en conjonction avec les intégrales données se trouve l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)^3}}.$$

La substitution simplement rationnelle doit détruire cette conjonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué d'une unité au moins.

Il suffit de considérer l'intégrale

$$S = \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^3(x-b)^6}}.$$

En posant

$$x - a = t^2,$$

nous aurons

$$S = 2 \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{t^3[t + \sqrt{b-a}]^3[t - \sqrt{b-a}]^3}}.$$

Par conséquent, nous aurons l'intégrale de la forme

$$A = \int \frac{tdt}{\sqrt[4]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^3}}.$$

En employant la substitution

$$x = m + \frac{1}{y},$$

nous réduirons l'intégrale donnée à la forme

$$A = \int \frac{(y+h)dy}{\sqrt[4]{(y-k)^3(y-l)^3(y-m)^3(y-n)^3}}.$$

Il est facile de prouver que cette intégrale appartient au troisième genre et se caractérise par les trois intégrales conjuguées de

la première espèce

$$u_1 = \int \frac{\partial y}{\sqrt[4]{(y-k)^3(y-l)^3(y-m)^3(y-n)^3}},$$

$$u_2 = \int \frac{y \partial y}{\sqrt[4]{(y-k)^3(y-l)^3(y-m)^3(y-n)^3}},$$

$$u_3 = \int \frac{\partial y}{\sqrt{(y-k)(y-l)(y-m)(y-n)}},$$

dont la troisième est elliptique. Présentons la fonction sous le radical dans la forme

$$(y-k)(y-l)(y-m)(y-n) = (y^2 + py + q)(y^2 + ry + s),$$

et employons la substitution ordinaire

$$y = \frac{\alpha z + \beta}{1 + z},$$

où α, β satisfont aux conditions

$$2\alpha\beta + p(\alpha + \beta) + 2q = 0,$$

$$2\alpha\beta + r(\alpha + \beta) + 2s = 0.$$

Par cette raison, nous aurons

$$u_1 = (\alpha - \beta) \int \frac{(1+z)\partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2 + B)(A'z^2 + B')]^3}},$$

$$u_2 = (\alpha - \beta) \int \frac{(\alpha z + \beta)\partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2 + B)(A'z^2 + B')]^3}}.$$

Ces intégrales se réduiront aux deux suivantes :

$$M = \int \frac{z \partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2 + B)(A'z^2 + B')]^3}},$$

$$N = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2 + B)(A'z^2 + B')]^3}}.$$

En posant

$$z^2 = t,$$

nous aurons définitivement

$$M = \frac{1}{2} \int \frac{\partial t}{\sqrt[4]{(At + B)^3 (A't + B')^3}},$$

$$N = \frac{1}{2} \int \frac{\partial t}{\sqrt[4]{t^2 (At + B)^3 (A't + B')^3}}.$$

Il est clair que M et N sont elliptiques.

10. Considérons la combinaison

$$\alpha = 2, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 7.$$

La recherche du genre de l'intégrale

$$V = \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2 (x-b)^7 (x-c)^7}}$$

amène au Tableau suivant :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	8	2	7	7	1
2	4	2	3	3	1
3	8	6	5	5	1
4	2	0	1	1	0
5	8	2	3	3	0
6	4	2	1	1	0
7	8	6	1	1	0

Ce tableau prouve que l'intégrale donnée appartient au genre trois. A ce genre appartiennent deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2 (x-b)^7 (x-c)^7}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^6 (x-b)^5 (x-c)^5}}$$

de la première et deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^6 (x-b)(x-c)}}.$$

En conjonction avec les intégrales caractéristiques de la première espèce se trouve l'intégrale elliptique

$$u = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}.$$

Cette circonstance donne lieu de prévoir que la substitution simplement rationnelle, en détruisant cette conjonction, diminuera le genre de l'intégrale d'une unité, Prenons l'intégrale

$$v = \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^7}}.$$

En posant

$$x - a = \frac{1}{z},$$

nous aurons

$$V = -\sqrt[8]{\alpha^7\beta^7} \int \frac{\partial z}{\sqrt[8]{\left[\left(z + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2\right]^7}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-b}, \quad \beta = \frac{1}{a-c}.$$

En posant encore

$$\left(z + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = t, \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = \gamma,$$

nous aurons

$$V = -\frac{1}{2} \sqrt[8]{\alpha^7\beta^7} \int \frac{\partial t}{\sqrt[8]{t^4(t-\gamma)^7}}.$$

L'intégrale obtenue est équivalente à l'intégrale

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt[8]{(y-\alpha)^4(y-\beta)^5(y-\gamma)^7}},$$

qui appartient au genre deux et se caractérise par deux intégrales caractéristiques de la première espèce, comme le prouve le Tableau ci-dessous :

q	L'exposant du radical	L'exposant de $x - a$	L'exposant de $x - b$	L'exposant de $x - c$	Le nombre des intégrales de la première espèce
1	8	4	5	7	1
2	4	0	1	3	0
3	8	4	7	5	1
4	2	0	1	1	0
5	8	4	1	3	0
6	4	0	3	1	0
7	8	4	3	1	0

REMARQUE SUR LE GENRE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

(Bull. des Sciences math., 2^e série, t. XXI, 1897, pp. 243-244)

Dans l'article : *Sur la détermination du genre des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binôme* ⁽¹⁾, nous avons trouvé pour le genre N des intégrales abéliennes de la forme

$$j = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda}},$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = km,$$

l'expression suivante

$$N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{m}{2} \sum_1^i \frac{(m-1)p_i - q_i + 1}{q_i},$$

où

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{\beta}{m}, \quad \dots, \quad \frac{p_i}{q_i} = \frac{\lambda}{m};$$

par conséquent

$$\sum_1^i \frac{p_i}{q_i} = \frac{\alpha + \beta + \dots + \lambda}{m} = k;$$

par conséquent

$$N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{mk(m-1)}{2} + \frac{m}{2} \sum_1^i \frac{q_i - 1}{q_i},$$

ou

$$N = -m + 1 + \frac{m}{2} \sum_1^i \frac{q_i - 1}{q_i}.$$

⁽¹⁾ Bulletin des Sciences mathématiques, 1895.

Comme q_i est un diviseur de m , nous avons

$$m = \rho_i q_i ;$$
$$N = \sum \frac{\rho_i (q_i - 1)}{2} = m + 1.$$

Nous avons obtenu, pour le genre N , une formule tout à fait identique à la formule de Riemann ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ *Gesammelte Werke*, p. 106.

ÉTUDE DIRECTE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DU GENRE UN

(*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*,
3^e série, t. XV, 1898, pp. 393-430)

1. — La présente étude portera sur les intégrales

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}, \\ & \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}}, \\ & \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}}. \end{aligned}$$

On sait que ce sont les seules intégrales abéliennes du type

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^2 (x-b)^3 \dots (x-c)^k}},$$

dont le genre est égal à l'unité et qui pour cela appartient à la catégorie des intégrales elliptiques. La réduction de ces intégrales aux elliptiques présente aussi peu d'intérêt que de difficulté. Nous nous sommes posé un tout autre problème. Considérant chacune des intégrales comme argument, nous allons étudier la variable x comme fonction de l'argument donné; trouver les périodes de cet argument; élucider enfin les principes généraux de l'inversion de toutes les intégrales abéliennes du genre *un* par les fonctions elliptiques de Weierstrass. Considérons d'abord l'intégrale

$$u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}.$$

Il est facile de voir qu'au voisinage du point

$$x - a = 0$$

nous aurons

$$x - a = u^3 F_1(u),$$

où $F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(0) \neq 0.$$

Nous avons ensuite

$$u = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}} + \int_b^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}.$$

Posant

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}} = \omega_1,$$

il vient

$$u - \omega_1 = \int_b^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}.$$

Par conséquent,

$$x - b = (u - \omega_1)^3 F_2(u);$$

$F_2(u)$ est une fonction holomorphe, satisfaisant à la condition

$$F_2(\omega_1) \neq 0.$$

Posons maintenant

$$\int_a^c \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}} = \omega_2;$$

nous avons

$$x - c = (u - \omega_2)^3 F_3(u),$$

$F_3(u)$ est une fonction holomorphe, satisfaisant à la condition

$$F_3(\omega_2) \neq 0.$$

Posant enfin

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}} = \sigma,$$

nous avons

$$x = (u - \sigma)^{-1} F_4(u),$$

$$\lim (u - \sigma) = 0,$$

$$F_4(\sigma) \neq 0;$$

$F_4(u)$ est une fonction holomorphe.

L'étude que nous venons de faire démontre que x est une fonction monodrome de l'argument u sur toute la surface de Riemann. Cette fonction comporte trois zéros et, comme il est facile de le démontrer, elle a trois infinis en trois points différents de la surface de Riemann. En effet, posant

$$\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2} = y,$$

nous voyons que x et y sont liés par une équation de la forme

$$y^3 - x^6 + Ax^5 + \dots + B = 0.$$

Cette équation exprime une courbe dont l'élément à l'infini est donné par l'équation

$$y^3 - x^6 = 0,$$

ou

$$(y - x^2)(y - \alpha^2 x^2)(y - \alpha x^2) = 0.$$

La forme de cette équation montre que x a trois infinis de premier ordre dans chacun des trois feuillets de la surface de Riemann. Conformément à la nature réelle des fonctions elliptiques de Weierstrass l'inversion de l'intégrale

$$u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

s'obtiendra le plus simplement dans le cas où tous les trois infinis de x seront réunis en un seul point de la surface de Riemann et pour cela il faut transporter à l'infini le point initial de ramification a par la transformation

$$x - a = \frac{1}{\xi}.$$

L'intégrale u prend alors la forme

$$(1) \quad z = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi - a')^2(\xi - b')^2}}.$$

Nous avons ici trois points de ramification

$$a', \quad b', \quad \infty.$$

En développant, nous avons

$$\begin{aligned} \xi &= z^{-3}F(z), \\ \lim z &= 0, \end{aligned}$$

$F(z)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F(0) \neq 0.$$

La fonction la plus simple de Weierstrass pour laquelle l'infini de troisième ordre est au point

$$z = 0$$

est $p'z$.

De l'équation (1) nous tirons

$$(2) \quad \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^3 = (\xi - a')^2 (\xi - b')^2.$$

Posons

$$\xi = \alpha p'z + \beta.$$

De l'équation différentielle (2), nous avons sans difficulté

$$\xi = \frac{27}{2} p'z + \frac{a' + b'}{2},$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\left(\frac{a' - b'}{27}\right)^2,$$

$$p'z = \sqrt{4p^3z + \left(\frac{a' - b'}{27}\right)^2} \quad (1).$$

Il n'est pas sans intérêt de rechercher si la fonction trouvée pour ξ satisfait aux conditions précitées. Les fonctions

$$(3) \quad \begin{cases} \xi - a' = \frac{27}{2} p'z - \frac{a' - b'}{2}, \\ \xi - b' = \frac{27}{2} p'z + \frac{a' - b'}{2} \end{cases}$$

doivent avoir les zéros triples; en d'autres termes nous devons avoir un développement de la forme

$$\begin{aligned} \xi - a' &= a_3(z - \omega)^3 + a_4(z - \omega)^4 + \dots, \\ \xi - b' &= b_3(z - \varpi)^3 + b_4(z - \varpi)^4 + \dots, \end{aligned}$$

où

$$\omega = \int_{\infty}^{a'} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi - a')^2 (\xi - b')^2}}, \quad \varpi = \int_{\infty}^{b'} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi - a')^2 (\xi - b')^2}},$$

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, mai 1893.

L'équation (3) nous donne

$$\frac{27}{2} p' \omega = \frac{a' - b'}{2},$$

ou

$$4p^3 \omega + \left(\frac{a' - b'}{27} \right)^2 = \left(\frac{a' - b'}{27} \right)^2,$$

ou bien

$$p \omega = 0.$$

En conséquence,

$$p'' \omega = 6p^2 \omega - \frac{1}{2} g_2 = 0,$$

$$p''' \omega = 12p \omega p' \omega = 0,$$

$$p^{IV} \omega = 12(p \omega p'' \omega + p'^2 \omega) = 12p'^2 \omega \neq 0.$$

Prenant en considération que

$$\begin{aligned} \xi - a' &= \left(\frac{27}{2} p' \omega - \frac{a' - b'}{2} \right) + (z - \omega) \frac{27}{2} p'' \omega \\ &+ \frac{(z - \omega)^2}{1.2} \frac{27}{2} p''' \omega + \frac{(z - \omega)^3}{1.2.3} \frac{27}{2} p^{IV} \omega + \dots, \end{aligned}$$

nous concluons

$$\xi - a' = \frac{9}{4} (z - \omega)^3 p^{IV} \omega - \dots \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous démontrerons de la même façon l'égalité

$$\xi - b' = b_3(z - \omega)^3 + b_4(z - \omega)^4 + \dots$$

2. Analysons maintenant l'intégrale

$$u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}}.$$

Étudiant, suivant les règles usuelles, les formes du développement x en fonction de u au voisinage du point

$$x - a = 0,$$

nous aurons comme résultat

$$x - a = u^2 F_1(u),$$

$F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(0) \neq 0.$$

Posant

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}} = \omega,$$

nous aurons

$$u - \omega = \int_b^x \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}},$$

d'où il suit que

$$x - b = (u - \omega)^4 F_2(u),$$

$F_2(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_2(\omega) \neq 0.$$

Posant encore

$$\int_a^c \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}} = \varpi,$$

nous voyons que

$$x - c = (u - \varpi)^4 F_3(u),$$

$F_3(u)$ est une fonction holomorphe, et

$$F_3(\varpi) \neq 0.$$

Enfin posant

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}} = \sigma,$$

nous trouverons facilement que

$$x = (u - \sigma)^4 F_4(u),$$

$F_4(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_4(\sigma) \neq 0.$$

Ainsi x est une fonction monodrome de u sur toute la surface de Riemann. La fonction $x - b$ a quatre zéros, tandis que $x - a$ en a apparemment deux. On s'assurera facilement que $x - a$ a deux zéros doubles. En effet, posant

$$\sqrt{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3} = y,$$

nous voyons que l'élément de la courbe au voisinage du point de ramification $x - a = 0$ est exprimé par l'équation

$$y^4 - (x-a)^3 = 0,$$

ou

$$(y^2 + x - a)(y^2 - x + a) = 0,$$

d'où il appert que

$$x - a = 0$$

est la réunion de deux points de ramification ; par conséquent $x - a$ a deux zéros doubles, soit quatre zéros en tout.

De même nous n'aurons pas de difficulté à nous assurer que x comporte quatre infinis simples. En vue de faciliter l'inversion au moyen des fonctions elliptiques de Weierstrass il faut prendre soin que les quatre infinis de x se trouvent en un même point de ramification. On y arrivera en transportant à l'infini le point de ramification b au moyen de la transformation

$$x - c = \frac{1}{y}.$$

L'intégrale donnée se ramènera à la forme

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{(y - a')^3 (y - b')^3}}.$$

Abordant maintenant l'étude de cette dernière intégrale, nous lui donnerons la forme concrète

$$z = \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{x^2(x - a)^3}}.$$

Au voisinage de l'infini le développement de x a la forme

$$x = z^{-4} F(z),$$

où $F(z)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F(0) \neq 0.$$

La fonction la plus simple de Weierstrass, ayant un infini de quatrième ordre au point

$$z = 0,$$

est $p^2 z$. C'est pourquoi, posant

$$x = \alpha p^2 z + \beta,$$

nous tâcherons de choisir α et β de façon à satisfaire identiquement l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = x^2(x - a)^3,$$

où, pour facilité de calcul, l'équation

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = \frac{128}{3} x^2(x-a)^3.$$

Il est facile de s'assurer que

$$x = 6p^2z + a, \\ g_2 = -\frac{2}{3}a, \quad g_3 = 0;$$

en conséquence

$$p'z = \sqrt[4]{4p^3z - \frac{2}{3}apz} \quad (1).$$

Posant

$$\int_{\infty}^a \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}x^2(x-a)^3}} = \omega,$$

nous démontrerons que $x - a$ comporte un développement de la forme

$$x - a = (z - \omega)^4 \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ est une fonction holomorphe et

$$\varphi(\omega) \neq 0.$$

Nous avons

$$x = 6p^2z + a, \\ x - a = 6p^2z,$$

donc

$$p^2 = 0.$$

Des équations

$$p'^2z = 4p^3z - \frac{2}{3}apz, \\ p''z = 6p^2z - \frac{1}{2}a,$$

nous tirons

$$p'\omega = 0, \\ p''\omega \neq 0.$$

Et comme

$$pz = p\omega + (z - \omega)p'\omega + \frac{(z - \omega)^2}{2}p''\omega + \dots,$$

(1) *Bull. des Sciences mathém.*, novembre 1893.

par conséquent

$$pz = \frac{(z - \omega)^2}{2} p''\omega + \dots,$$

donc

$$x - a = \frac{3}{2} (z - \omega)^4 p''\omega + \dots$$

C. Q. F. D.

Posant

$$\int_{\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2(x - a)^3}} = \omega,$$

nous démontrerons que x comporte deux zéros doubles. Nous avons

$$x = 6p^2z + a,$$

conséquemment

$$\begin{aligned} 6p^2z + a &= 0, \\ p^2\omega &= -\frac{a}{6}. \end{aligned}$$

Prenant en considération que

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=\omega} = 12p\omega p'\omega,$$

nous trouverons $p'\omega$. Nous avons

$$p'^2\omega = \frac{2}{3} p\omega(6p^2\omega + a) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)_{z=\omega} = 12p'^2\omega + 12p\omega p''\omega.$$

Comme

$$p''\omega = 6p^2\omega + \frac{a}{3} = -\frac{3}{2}a \neq 0,$$

donc

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)_{z=\omega} \neq 0.$$

Par conséquent

$$x = A(z - \omega)^2 + B(z - \omega)^3 + \dots$$

Prenant en considération que l'équation

$$6p^2z + a = 0$$

est satisfaite non seulement par

$$z = \omega,$$

mais aussi par

$$z = i\varpi \quad (i = \sqrt{-1}),$$

nous avons encore un développement

$$x = A'(z - i\varpi)^2 + B'(z - i\varpi)^3 + \dots$$

Ainsi x a deux zéros doubles.

C. Q. F. D.

Les périodes de l'intégrale

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3} x^2(x-a)^3}}$$

seront

$$2\omega = 2 \int_{\infty}^a \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3} x^2(x-a)^3}}, \quad 2\varpi = 2 \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3} x^2(x-a)^3}}.$$

3. L'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

sera ramenée à la forme

$$(5) \quad z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-a)^3}}.$$

Démontrons que l'inversion de l'argument z peut être directement opérée sans avoir recours à la substitution préalable

$$x = \frac{1}{y},$$

ayant pour but de ramener tous les infinis de x en un seul point de la surface de Riemann. Nous avons pour x , qui est une fonction monodrome de z , le développement de la forme

$$x = z^4 F_1(z).$$

$F_1(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$F_1(0) \neq 0.$$

Posant

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-a)^3}} = \omega,$$

nous avons

$$x - a = (z - \omega)^4 F_2(z),$$

$F_2(z)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_2(\omega) \neq 0.$$

Développant en série l'intégrale au voisinage de l'infini et inversant cette série, nous assurons que

$$x = (z - \omega)^{-2} F(z),$$

$$\lim (z - \omega) = 0.$$

$F(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$F(\omega) \neq 0.$$

On voit immédiatement que x a deux infinis doubles. Le nombre des zéros est égal au nombre des infinis. Ainsi donc nous devons choisir pour x une fonction de Weierstrass comportant quatre zéros confondus et deux infinis doubles. La plus simple fonction de ce genre est

$$\xi = \frac{p^2 z - e_i}{p'^2 z}, \quad i = 1, 2, 3.$$

En vue de déterminer plus commodément des invariants, nous prendrons en considération ce qui suit. L'argument (5), par la transformation

$$x = \frac{1}{y},$$

prend la forme

$$(16) \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt[4]{y^2(y-a)^3}}.$$

L'un des invariants de cette intégrale est

$$g_3 = 0.$$

Par suite de la transformation

$$x = \frac{1}{y},$$

l'argument se trouve multiplié par une certaine constante et, en vertu du théorème de l'homogénéité, les invariants reçoivent aussi des multiplicateurs constants. C'est pourquoi, si l'invariant g_3 de (6) est égal à zéro, l'invariant correspondant de l'argument (5) est égal à zéro. Mais, si

$$g_3 = 0,$$

l'une des quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3$$

est égale à zéro. Posant

$$e_1 = e_i = 0,$$

nous avons

$$\xi = \frac{pz}{p^{i2}z}.$$

Si

$$\lim z = 0,$$

nous avons

$$pz = \frac{1}{z^2} + \varphi(z),$$

$$p'z = -\frac{2}{z^3} + \psi(z);$$

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ sont holomorphes; donc

$$\xi = z^4 f(z),$$

$f(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$f(0) \neq 0.$$

D'où l'on voit que les quatre zéros de ξ , de même que les quatre zéros de x se confondent au point $z = 0$. Étudions maintenant les infinis de ξ . Nous avons

$$\xi = \frac{1}{4p^2z - g_2} = \frac{1}{4(pz - e_2)(pz - e_3)}.$$

Si

$$pz - e_2 = 0,$$

alors

$$p'z = 0,$$

$$p''z = 6e_2^2 - \frac{1}{2}g_2 \neq 0.$$

C'est pourquoi la fonction

$$pz - e_2$$

se développe en la série

$$pz - e_2 = (z - \Omega)^2 F_1(z),$$

où $F_1(z)$ est une fonction holomorphe, satisfaisant à la condition

$$F(\Omega) \neq 0;$$

Ω est une demi période de l'argument elliptique z . Par conséquent, au voisinage du point

$$z = \Omega,$$

ξ se développe en série

$$\xi = \frac{1}{(z - \Omega)^2} \Phi(z),$$

$\Phi(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$\Phi(\Omega) \neq 0.$$

Ainsi ξ a un infini de second ordre pour

$$z = \Omega.$$

Nous démontrerons de même que ξ a un infini de second ordre pour

$$z = \Omega_1,$$

où Ω_1 est une autre demi-période de l'argument elliptique z .

Nous pouvons prévoir que x diffère de ξ par un facteur constant.

Posons

$$x = \alpha \xi = \frac{\alpha p z}{p'^2 z},$$

et choisissons α de manière à satisfaire l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = x^3(x - a)^3$$

Nous avons

$$x = \frac{\alpha}{4p^2z - g_2},$$

$$-\frac{dx}{dz} = -\frac{8\alpha p z p' z}{(4p^2z - g_2)^2};$$

conséquemment

$$\frac{4^6 \alpha^3 p^6 z}{(4p^2z - g_2)^6} = \frac{\alpha^3 (\alpha + a g^2 - 4a p^2 z)^3}{(4p^2z - g_2)^6};$$

d'où nous tirons les deux conditions

$$g_2 = -\frac{\alpha}{a},$$

$$-4^3 \alpha^3 a^3 = 4^6 \alpha^4,$$

donc

$$\alpha = -\left(\frac{a}{4}\right)^3, \quad g_2 = \frac{a^2}{4^3}.$$

Enfin,

$$x = -\frac{a^3}{4^3} \frac{p z}{4p^3 z - \frac{a^2}{4^3} p z} = -\frac{a^3}{4^3} \frac{1}{4p^2 z - \frac{a^2}{4^3}}.$$

4. Étudions maintenant l'intégrale

$$u = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}.$$

Au voisinage du point de ramification c nous avons le développement

$$x - c = u^6 F_1(u);$$

$F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(0) \neq 0.$$

Posant

$$\int_c^a \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}} = \omega,$$

il vient

$$x - a = (u - \omega)^2 F_1(u),$$

$F_1(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F_1(\omega) \neq 0.$$

Répétant les raisonnements appliqués deux fois dans les paragraphes précédents, nous nous assurons facilement qu'au point

$$u = \omega$$

la fonction $x - a$ a trois zéros doubles, attendu que, au point

$$x - a = 0,$$

sont confondus trois points de ramification. Posant

$$\int_c^b \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}} = \varpi,$$

nous avons

$$x - b = (u - \varpi)^3 F_3(u),$$

$F_3(u)$ est une fonction holomorphe de u satisfaisant à la condition

$$F_3(\varpi) \neq 0.$$

Comme au point

$$x - b = 0$$

sont confondus trois points de ramification, la fonction $x - b$ comporte, au point

$$u = \varpi,$$

deux zéros triples.

Posons, enfin,

$$\int_c^\infty \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}} = \Omega;$$

nous aurons

$$\begin{aligned} x &= (u - \Omega)^{-1} F_4(u), \\ \lim (u - \Omega) &= 0; \end{aligned}$$

$F_4(u)$ est une fonction holomorphe de u satisfaisant à la condition

$$F_4(\Omega) \neq 0.$$

On comprendra facilement que, dans chacun des six feuillets de la surface de Riemann, x a un infini de premier ordre. Les développements trouvés nous démontrent que x est une fonction monodrome de l'argument u ayant six zéros confondus au point de ramification c et six infinis distincts. A l'effet de donner la plus grande simplicité à l'expression de x en fonctions elliptiques de Weierstrass, il convient de transformer l'intégrale de façon que les six infinis x se confondent en un point de la surface de Riemann. Il suffit pour cela de transporter à l'infini le point de ramification c . Posant

$$x - c = \frac{1}{y}.$$

nous ramenons l'intégrale donnée à la forme

$$z = \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt[6]{(y+\alpha)^3(y-\beta)^4}}.$$

Si nous considérons y comme fonction de z , nous verrons que y a un infini de sixième ordre; $y + \alpha$ a trois zéros doubles; $y + \beta$ a deux zéros triples. Cette fonction doit être du troisième degré par rapport à pz ; voilà pourquoi elle doit être de la forme

$$y = kp^3z + lp^2z + mpz + n.$$

Comme

$$y + \alpha$$

a trois zéros doubles, cette fonction doit être divisible par

$$4(pz - e_1)(pz - e_2)(pz - e_3) = 4p^3z - g_2pz - g_3;$$

par conséquent,

$$y = \rho \left(4p^3z - g_2pz - g_3 - \frac{\alpha}{\rho} \right).$$

Comme

$$y + \beta$$

a deux zéros triples, la fonction

$$y + \beta = \rho \left(4p^3z - g_2pz - g_3 - \frac{\alpha - \beta}{\rho} \right)$$

doit être divisible par p^3z ; c'est pourquoi

$$g_2 = 0, \quad g_3 + \frac{\alpha - \beta}{\rho} = 0, \quad g_3 = \frac{\beta - \alpha}{\rho}.$$

Ainsi

$$y = \rho \left(4p^3z - \frac{\beta}{\rho} \right).$$

Il nous reste à déterminer ρ que nous tirerons de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dz} \right)^6 = (y + \alpha)^3(y + \beta)^4,$$

et nous aurons

$$\rho = 2^4 \cdot 3^6,$$

$$y = 2^4 \cdot 3^6 \left(4p^3z - \frac{\beta}{2^4 \cdot 3^6} \right).$$

5. Il n'est pas difficile de s'assurer que l'intégrale

$$z = \int_{\beta}^x \frac{dx}{\sqrt{(x - \beta)^5(x - \alpha)^4}}.$$

peut être invertie au moyen des fonctions elliptiques de Weierstrass sans transformation préalable de la forme

$$x - \beta = \frac{1}{y}.$$

Nous ferons cette recherche suivant l'ordre précédemment établi. Au voisinage du point

$$x - \alpha = 0$$

nous avons le développement

$$x - \alpha = (z - \omega)^3 F_1(z);$$

$F_1(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_1(\omega) \neq 0,$$

$$\omega = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(x - \beta)^5(x - \alpha)^4}}.$$

Il est clair que la fonction $x - \alpha$ comporte deux zéros de troisième ordre, car au point

$$x - \alpha = 0$$

sont confondus deux points de ramification, chacun de ceux-ci réunissant trois feuillets de la surface de Riemann. Posant

$$\varpi = \int_{\beta}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[6]{(x - \beta)^5(x - \alpha)^4}},$$

nous avons

$$x = (z - \varpi)^{-2} F_2(z),$$

$F_2(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_2(\varpi) \neq 0.$$

Il est clair que x a trois infinis du second ordre, car il possède à l'infini trois points de ramification réunissant chacun deux feuillets de la surface de Riemann. Enfin

$$x - \beta = z^6 F_3(z),$$

$F_3(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_3(0) \neq 0.$$

Enfin, il faut trouver une fonction de Weierstrass satisfaisant aux conditions trouvées, et en premier lieu nous avons au point

$$z = 0$$

un zéro de sixième ordre. Une telle fonction doit avoir la forme

$$x - \beta = \frac{A}{ap^3z + bp^2z + cpz + d}.$$

Cette fonction doit avoir trois infinis de second ordre, et pour cela il faut avoir

$$x - \beta = \frac{A}{4(pz - e_1)(pz - e_2)(pz - e_3)},$$

attendu que chaque multiplicateur

$$(pz - e_1), \quad (pz - e_2), \quad (pz - e_3)$$

a un zéro de second ordre. Par conséquent,

$$x - \beta = \frac{A}{4p^2z - g_3},$$

$g_2 = 0$ conformément à la remarque ci-dessus. Nous avons ensuite

$$x - \alpha = \frac{4(\beta - \alpha)p^3z + A - g_3(\beta - \alpha)}{4p^3z - g_3}.$$

Pour que cette fonction ait deux zéros de troisième ordre, il faut que

$$\begin{aligned} A - g_3(\beta - \alpha) &= 0, \\ g_3 &= \frac{A}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Il reste à tirer A de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^6 = (x - \alpha)^4(x - \beta)^5.$$

Nous aurons

$$A = \frac{(\beta - \alpha)^4}{2^4 \cdot 3^6};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{2^4 \cdot 3^6}, \\ x &= \beta + \frac{(\beta - \alpha)^4}{2^4 \cdot 3^6 \left[4p^3z - \frac{(\beta - \alpha)^3}{2^4 \cdot 3^6} \right]} \end{aligned}$$

6. Il nous reste à étudier, au moyen de la même méthode, l'intégrale

$$z = \int_{\beta}^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x - \alpha)^3(x - \beta)^5}}.$$

Posant

$$\omega = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt[6]{(x - \alpha)^3(x - \beta)^5}},$$

nous avons pour $x - \alpha$ le développement

$$x - \alpha = (z - \omega)^2 F_1(z);$$

$F_1(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_1(\omega) \neq 0.$$

Il est clair qu'au point

$$x - \alpha = 0$$

sont confondus trois zéros de second ordre, car en ce point se trouvent trois points de ramification, chacun de ceux-ci réunissant

deux feuillets de la surface de Riemann. Nous avons, de même,

$$x - \beta = z^6 F_2(z),$$

$F_2(z)$ est une fonction holomorphe,

$$F_2(0) \neq 0.$$

Posant maintenant

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[6]{(x - \alpha)^3 (x - \beta)^3}} = \varpi,$$

il vient

$$x = (z - \varpi)^{-3} F_3(z);$$

$F_3(z)$ est une fonction holomorphe, et

$$F_3(\varpi) \neq 0.$$

Ainsi donc, x est une fonction monodrome de l'argument z satisfaisant aux conditions suivantes : 1° $x - a$ comporte trois zéros de second ordre; 2° $x - b$ comporte un zéro de sixième ordre; 3° x comporte deux infinis de troisième ordre. La fonction elliptique de Weierstrass ayant un zéro de sixième ordre pour $z = 0$ doit être de la forme

$$x - \beta = \frac{A}{4p^3z + ap^2z + bpz + c},$$

$$x - \alpha = \frac{A - \alpha(4p^3z + ap^2z + bpz + c)}{4p^3z + ap^2z + bpz + c}.$$

Comme $x - a$ a trois zéros de second ordre, le numérateur de la dernière formule doit être de la forme

$$A - \alpha(4p^3z + ap^2z + 6pz + c) = k(pz - e_1)(pz - e_2)(pz - e_3).$$

Il suit de là que

$$a = 0, \quad A - \alpha c = \alpha g_3.$$

Conformément aux conditions émises plus haut, nous avons

$$g_2 = 0,$$

donc

$$b = 0;$$

par conséquent,

$$x - \beta = \frac{A}{4p^3z + \frac{A - \alpha g_3}{\alpha}},$$

$$x = \frac{A + 4\beta p^3z - \frac{A - \alpha g_3}{\alpha} \beta}{4p^3z + \frac{A - \alpha g_3}{\alpha}}.$$

Comme x a deux infinis de troisième ordre, nous avons

$$A - \alpha g_3 = 0;$$

$$x = \frac{4\beta p^3z + A}{4p^3z},$$

$$x - \alpha = -\frac{\alpha p'^2z}{4p^3z},$$

$$x - \beta = \frac{A}{4p^3z},$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{3}{4} A \frac{p'z}{p^4z}.$$

Il nous reste à tirer A de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^6 = (x - \alpha)^3 (x - \beta)^5,$$

$$A = \frac{-\alpha^3}{2^4 \cdot 3^6},$$

$$x = \frac{4\beta p^3z - \frac{\alpha^3}{2^4 \cdot 3^6}}{4p^3z}.$$

7. Nous avons étudié suffisamment en détail le type d'intégrales considérées. Il nous reste encore à montrer que les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$$

peuvent être soumises à l'inversion indépendamment d'une transformation de la forme

$$x - a = \frac{1}{y}.$$

Considérons l'intégrale

$$z = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

En vue de l'inversion de cette intégrale il nous faut trouver une fonction de Weierstrass qui satisfasse aux conditions suivantes :
 1° l'équation $x - a = 0$ a un zéro de troisième ordre pour $z = 0$;
 2° l'équation $x - b = 0$ a un zéro de troisième ordre pour

$$z = \omega = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}};$$

3° l'équation $x - c = 0$ a un zéro de troisième ordre pour

$$z = \varpi = \int_a^c \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}};$$

4° x a trois infinis distincts de premier ordre dans les trois feuillets de la surface de Riemann. La fonction de Weierstrass ayant un zéro de troisième ordre pour $z = 0$ a la forme

$$x - a = \frac{\alpha}{p'z + \beta}.$$

Par conséquent

$$x - b = (a - b) \frac{p'z + \beta + \frac{\alpha}{a - b}}{p'z + \beta},$$

$$x - c = (a - c) \frac{p'z + \beta + \frac{\alpha}{a - c}}{p'z + \beta}.$$

Ces deux fonctions doivent avoir deux zéros de troisième ordre :
 la première pour

$$z = \omega,$$

la seconde pour

$$z = \varpi;$$

c'est pourquoi nous avons simultanément les deux systèmes d'équations

$$(I) \quad \begin{cases} p'\omega + \beta + \frac{\alpha}{a-b} = 0, \\ p''\omega = 6p^2\omega - \frac{1}{2}g_2 = 0, \\ p'''\omega = 12p\omega p'\omega = 0, \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} p'\varpi + \beta + \frac{\alpha}{a-b} = 0, \\ p''\varpi = 6p^2\varpi - \frac{1}{2}g_2 = 0, \\ p'''\varpi = 12p\varpi p'\varpi = 0, \end{cases}$$

desquelles il ressort que : ou bien

$$p'\omega = p'\varpi = 0,$$

ou bien

$$p\omega = p\varpi = 0.$$

La première hypothèse est inadmissible, car nous aurions alors

$$b = c,$$

ce qui ne peut être ; donc

$$p\omega = p\varpi = 0,$$

et alors

$$g_2 = 0,$$

$$\sqrt{-g_3} = -\left(\beta + \frac{\alpha}{a-b}\right),$$

$$-g_3 = \left(\beta + \frac{\alpha}{a-b}\right)^2 = \left(\beta + \frac{\alpha}{a-c}\right)^2,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{a-b} = \pm \left(\beta + \frac{\alpha}{a-c}\right).$$

On ne peut supposer que

$$\beta + \frac{\alpha}{a-b} = \beta + \frac{\alpha}{a-c}.$$

car alors

$$b = c;$$

conséquemment

$$2\beta + \frac{\alpha(2a-b-c)}{(a-b)(a-c)} = 0.$$

Nous avons ensuite

$$(x - a)(x - b)(x - c) = \frac{4\alpha(a - b)(a - c)p^3z}{(p^2z + \beta)^3}.$$

L'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 = (x - a)^2(x - b)^2(x - c)^2$$

nous donne

$$\alpha = \frac{2}{27}(a - b)^2(a - c)^2,$$

$$\beta = -\frac{(2a - b - c)(a - b)(a - c)}{27};$$

$$x - a = \frac{\frac{2}{27}(a - b)^2(a - c)^2}{p^2z - \frac{1}{27}(a - b)(a - c)(2a - b - c)};$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{1}{27}(a - b)(a - c)(b - c).$$

8. D'un non moindre intérêt est l'inversion de l'intégrale

$$z = \int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(x - a)^2(x - b)^3(x - c)^3}}.$$

Nous avons vu que $(x - b)$ a quatre zéros pour

$$z = 0,$$

$(x - c)$ a quatre zéros pour

$$z = \omega,$$

$x - a$ a deux zéros de second ordre pour

$$z = \varpi;$$

enfin, x a quatre infinis de premier ordre dans les quatre feuillets de la surface de Riemann. Posant donc

$$x - b = \frac{\alpha}{p^2z + \beta},$$

nous voyons que la première condition est remplie. Nous avons

$$x - c = \frac{(b - c)p^2z + \alpha + (b - c)\beta}{p^2z + \beta}.$$

Afin de satisfaire à la seconde condition il faut avoir simultanément

$$\begin{aligned} p^2\omega + \beta + \frac{\alpha}{b-c} &= 0, \\ p\omega p'\omega &= 0, \\ p'^2\omega + p\omega p''\omega &= 0, \\ 3p'\omega p''\omega + 12p^2\omega p'\omega &= 0, \\ p''^2\omega + 8p\omega p'^2\omega + 4p^2\omega p''\omega &\neq 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$p\omega = 0, \quad p'\omega = 0, \quad p''\omega = 6p^2\omega - \frac{1}{2}g^2 \neq 0.$$

Par conséquent

$$(7) \quad \begin{aligned} \beta + \frac{\alpha}{b-c} &= 0, \\ g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons ensuite

$$x - a = \frac{(b-a)p^2z + \alpha + (b-a)\beta}{p^2z + \beta}.$$

Afin de remplir la troisième condition il faut avoir simultanément

$$\begin{aligned} p^2\omega + \beta + \frac{\alpha}{b-a} &= 0, \\ p\omega p'\omega &= 0, \\ p'^2\omega + p\omega p''\omega &\neq 0. \end{aligned}$$

On ne peut supposer que

$$p\omega = 0,$$

car nous aurions alors d'un côté

$$a = c,$$

ce qui ne peut être ; d'autre part

$$p'^2\omega \neq 0,$$

ce qui est impossible eu égard à l'égalité

$$g_3 = 0;$$

c'est pourquoi

$$p'\omega = 0, \quad p\omega \neq 0, \quad p''\omega \neq 0.$$

Alors

$$(8) \quad \beta + \frac{\alpha}{b-a} = -\frac{1}{4}g_2.$$

De deux équations (6) et (7) on ne saurait tirer les inconnues

$$\alpha, \beta, g_2.$$

Il faut pour cela prendre l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^4 = (x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3$$

qui nous donne

$$\alpha = \frac{(b-c)^2 (b-a)^2}{2^8},$$

$$\beta = \frac{(b-a)^2 (b-c)}{2^8},$$

$$g_2 = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2^8}, \quad g_3 = 0,$$

$$x-b = \frac{(b-c)^2 (b-a)^2}{2^8 \left[p^2 z - \frac{(b-a)^2 (b-c)}{2^8} \right]}.$$

Il est clair que x a quatre infinis distincts pour les valeurs de l'argument qui satisfont à l'équation

$$p^2 z = \frac{(b-a)^2 (b-c)}{2^8}.$$

9. Nous montrerons enfin la méthode d'inversion de l'intégrale

$$z = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}}.$$

Il s'agit de rechercher une fonction x de Weierstrass qui satisfasse aux conditions suivantes : 1° la fonction $(x-a)$ comporte trois zéros de second ordre pour la valeur

$$z = \omega = \int_c^a \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}};$$

2° la fonction $x-b$ comporte deux zéros de troisième ordre pour la valeur

$$z = \omega = \int_c^b \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}};$$

3° la fonction $x - c$ comporte un zéro de sixième ordre pour la valeur $z = 0$; 4° x a six infinis distincts. Posant

$$x - \omega = \frac{\alpha}{p^3 z + \beta},$$

nous voyons que $x - c$ comporte un zéro de sixième ordre pour $z = 0$.

Nous avons

$$x - b = (c - b) \frac{p^3 z + \beta + \frac{\alpha}{c - b}}{p^3 z + \beta}.$$

Pour que $x - b$ ait deux zéros de troisième ordre pour $z = \omega$, il faut que nous ayons simultanément

$$\begin{aligned} p^3 \omega + \beta + \frac{\alpha}{c - b} &= 0, \\ p^3 \omega p' \omega &= 0, \\ 2p \omega p'^2 \omega + p^2 \omega p'' \omega &= 0, \\ 2p'^3 \omega + 6p \omega p' \omega p'' \omega + p^2 \omega p''' \omega &\neq 0; \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$p \omega = 0, \quad p' \omega \neq 0;$$

et alors

$$\begin{aligned} \beta + \frac{\alpha}{c - b} &= 0, \\ x - b &= \frac{(c - b) p^3 z}{p^3 z + \beta}; \end{aligned}$$

$p^3 z$ a effectivement deux zéros de troisième ordre. Nous avons

$$x - a = (c - a) \frac{p^3 z + \beta + \frac{\alpha}{c - a}}{p^3 z + \beta}.$$

Afin que $x - a$ ait trois zéros de second ordre, nous devons avoir

$$g_2 = 0, \quad -\frac{1}{4} g_3 = \beta + \frac{\alpha}{c - a}.$$

De l'équation

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^6 = (x - a)^3 (x - b)^4 (x - c)^5,$$

nous tirons

$$\alpha = \frac{(c - a)^3 (c - b)^3}{2^6 \cdot 3^6},$$

voilà pourquoi

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{(c-a)^3(c-b)^3}{2^6 \cdot 3^6}, \\ g_3 &= \frac{(b-a)(c-a)^2(b-c)^3}{2^4 \cdot 3^6}, \quad g_2 = 0, \\ x-c &= \frac{(c-a)^3(c-b)^4}{2^6 \cdot 3^6 [p^1 z - (c-a)^3(c-b)^3]}. \end{aligned}$$

Cette forme montre que x comporte six infinis distincts dans les six feuillets de la surface de Riemann.

10. Après avoir traité avec tous les détails convenables la question de l'inversion des intégrales abéliennes du premier genre, nous ne pouvons passer sous silence les intégrales elliptiques ordinaires. Les principes d'inversion précités s'appliquent, avec la plus grande facilité, aux intégrales elliptiques et fournissent une nouvelle forme d'inversion de celles-ci, laquelle a été déjà brièvement indiquée par Halphen ⁽¹⁾.

Prenons l'intégrale

$$(9) \quad z = \int_a^y \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}}.$$

Posant

$$y-a=x,$$

nous avons

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(x+a-b)(x+a-c)(x+a-d)}}.$$

Désignant maintenant

$$b-a=x_1, \quad c-a=x_2, \quad d-a=x_3,$$

nous écrirons

$$(10) \quad z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}.$$

La fonction x , au voisinage des points de ramification, a la forme

$$\begin{aligned} x &= z^2 F_1(z), \\ x-x_1 &= (z-\omega)^2 F_2(z), \\ x-x_2 &= (z-\omega_1)^2 F_3(z), \\ x-x_3 &= (z-\omega_2)^2 F_4(z), \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I, p. 131; 1886.

ou

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}, \\ \omega_1 &= \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}, \\ \omega_2 &= \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}.\end{aligned}$$

$F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, $F_4(z)$ sont holomorphes, et

$$F_1(0) \neq 0, \quad F_2(\omega) \neq 0, \quad F_3(\omega_1) \neq 0, \quad F_4(\omega_2) \neq 0.$$

En outre, x comporte deux infinis distincts de premier ordre en deux feuillets de la surface de Riemann. Il s'ensuit évidemment que la fonction de Wierstrass, douée de même propriété que x , doit avoir une forme très simple,

$$x = \frac{\alpha}{pz + \beta}.$$

Au point $z = 0$, la fonction x a un zéro de second ordre. Nous avons ensuite

$$x - x_1 = -x_1 \frac{pz + \beta - \frac{\alpha}{x_1}}{pz + \beta}.$$

Pour que cette fonction ait un zéro de second ordre, il faut que

$$p\omega + \beta - \frac{\alpha}{x_1} = 0, \quad p'\omega = 0, \quad p''\omega = 6p^2\omega - \frac{1}{2}g_2 \neq 0,$$

et, pour cela, il faut satisfaire à la condition

$$(11) \quad \beta - \frac{\alpha}{x_1} = -e_1.$$

Étant donné que les trois différences

$$x - x_1, \quad x - x_2, \quad x - x_3$$

sont douées de propriétés identiques, nous avons encore

$$(12) \quad \begin{cases} \beta - \frac{\alpha}{x_2} = -e_2, \\ \beta - \frac{\alpha}{x_3} = -e_3, \end{cases}$$

et de même

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{pz + \beta}, \\ x - x_1 &= -\frac{x_1(pz - e_1)}{pz + \beta}, \\ x - x_2 &= -\frac{x_2(pz - e_2)}{pz + \beta}, \\ x - x_3 &= -\frac{x_3(pz - e_3)}{pz + \beta}; \end{aligned}$$

conséquemment

$$X = x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = -\frac{\alpha x_1 x_2 x_3 p'^2 z}{4(pz + \beta)^4}.$$

Nous déterminerons le multiplicateur constant α au moyen de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = X,$$

qui nous donne

$$(13) \quad \alpha = -\frac{x_1 x_2 x_3}{4}.$$

Additionnant (11) et (12) et remarquant que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

nous avons

$$(14) \quad 3\beta + \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{4} = 0,$$

$$\beta = -\frac{1}{12}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

Des équations (11) et (12), nous tirons

$$\frac{-\alpha^3}{x_1 x_2 x_3} = (-\beta - e_1)(-\beta - e_2)(-\beta - e_3),$$

ou

$$\alpha^2 = 4(-\beta - e_1)(-\beta - e_2)(-\beta - e_3).$$

Supposant que

$$-\beta = pz_0,$$

nous avons

$$\alpha = p' z_0;$$

par conséquent,

$$(15) \quad \begin{aligned} x &= \frac{p'z_0}{pz - pz_0}, \\ y &= a + \frac{p'z_0}{pz - pz_0}, \end{aligned}$$

$$pz_0 = \frac{1}{12} [(a-b)(a-c) + (a-b)(a-d) + (a-c)(a-d)],$$

$$(16) \quad p'z_0 = \frac{1}{4} (a-b)(a-c)(a-d).$$

En outre,

$$e_1 = \frac{1}{12} [(a-b)(a-c) + (a-b)(a-d) - 2(a-c)(a-d)],$$

$$e_2 = \frac{1}{12} [(a-b)(a-c) + (a-c)(a-d) - 2(a-b)(a-d)],$$

$$e_3 = \frac{1}{12} [(a-b)(a-d) + (a-c)(a-d) - 2(a-b)(a-c)].$$

De ces équations on peut tirer les invariants g_2, g_3 en fonction des racines

$$a, \quad b, \quad c, \quad d.$$

Mais on peut déterminer les invariants en fonction des coefficients, n° 11 du polynôme

$$J(y) = (y-a)(y-b)(y-c)(y-d) = y^4 + 4a_1y^3 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4.$$

Nous avons, évidemment,

$$p'z_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{dJ}{dy} \right)_{y=a} = \frac{1}{4} J'(a),$$

$$pz_0 = \frac{1}{24} \left(\frac{d^2J}{dy^2} \right)_{y=a} = \frac{1}{24} J''(a).$$

Par conséquent,

$$(17) \quad \left[\frac{1}{4} J'(a) \right]^2 = 4 \left[\frac{1}{24} J''(a) \right]^3 - g_2 \left[\frac{1}{24} J''(a) \right] - g_3;$$

a étant une racine quelconque du polynôme $J(y)$, toutes les racines de l'équation

$$J(y) = 0$$

satisfont à l'équation (17). C'est pourquoi le polynôme

$$(18) \quad A = \left[\frac{1}{4} J'(y) \right]^2 - 4 \left[\frac{1}{24} J''(y) \right]^3 + g_2 \left[\frac{1}{24} J''(y) \right] + g_3$$

est divisible par le polynome $J(y)$. De cette condition, nous tirerons g_2 et g_3 , comme le montre le calcul suivant. Nous avons

$$\begin{aligned} 2A = & y^6 + 6a_1y^5 + (6a_1^2 + 9a_2)y^4 + (24a_1a_2 + 4a_3 - 8a_1^3)y^3 \\ & + (15a_2^2 + 2a_1a_3 - 12a_1^2a_2 + g_2)y^2 + 12a_2a_3 - 6a_1a_2^2 + 2a_1g_2)y \\ & + (2a_3^2 - a_2^3 + a_2g_2 + 2g_3). \end{aligned}$$

Divisant $2A$ par

$$y^4 + 4a_1y^3 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4,$$

nous aurons le quotient

$$y^2 + 2a_1y + 3a_2 - 2a_1^2,$$

et le reste

$$(g_3 - a_4 - 3a_2^2 + 4a_1a_3)y^2 + (2a_3^2 - a_2^3 + a_2g_2 + 2g_3 - 3a_2a_4 + 2a_1^2a_4).$$

Égalant ce reste à zéro, nous aurons

$$\begin{aligned} g_2 &= a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3, \\ g_3 &= a_2^3 - a_3^2 + a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4, \end{aligned}$$

ce qui est conforme aux résultats connus.

Exemple numérique. — On donne l'intégrale

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6x^2 + 12x + 37}},$$

$$J = x^4 + 6x^2 + 12x + 37,$$

$$\frac{1}{4} J' = x^3 + 3x + 3,$$

$$\frac{1}{24} J'' = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2}.$$

Nous avons

$$A = (x^3 + 3x + 3)^2 - \frac{1}{2} (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) + \frac{1}{2} g_2(x^2 + 1) + g_3.$$

$$2A = x^6 + 9x^4 + 12x^3 + (15 + g_2)x^2 + 36x + (17 + g_2 + 2g_3).$$

Divisant $2A$ par

$$x^4 + 6x^2 + 12x + 37,$$

nous trouvons le quotient

$$x^2 + 3$$

et le reste

$$(g_2 - 40)x^2 + (2g_3 + g_2 - 94) = 0.$$

De là

$$\begin{aligned} g_2 - 40 &= 0, & g_2 &= 40. \\ 2g_3 + g_2 - 94 &= 0, & g_3 &= 27. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6x^2 + 12x + 37}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - 40z - 27}}.$$

12. — Il est fort intéressant d'établir un lien entre les formules trouvées et la forme bien connue d'inversion des intégrales elliptiques ⁽¹⁾. Pour ce faire, introduisons dans la formule (9),

$$a + b + c + d = 0,$$

ce qui ne présente pas de difficultés. Nous donnerons, par conséquent, au polynôme du quatrième degré la forme

$$(y - a)(y - b)(y - c)(y - d) = y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4;$$

alors, comme on sait,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu}, \\ \pm \sqrt{y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4} &= p(u + \nu) - pu, \\ (19) \quad -p\nu &= \alpha_2, \quad p'\nu = \alpha_3. \end{aligned}$$

Comparant ces formules avec les suivantes

$$\begin{aligned} y &= a + \frac{p'z_0}{pz - pz_0}, \\ pz_0 &= \frac{1}{24} J''(a) = \frac{1}{2} (a^2 + \alpha_2), \\ (20) \quad p'z_0 &= \frac{1}{4} J'(a) = a^3 + 3\alpha_2 a + \alpha_3 \end{aligned}$$

qui ont été établies au n° 10; ici

$$J(y) = y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4;$$

la valeur des invariants est la même dans les deux cas,

$$g_2 = \alpha_4 + 3\alpha_2^2, \quad g_3 = \alpha_3^3 + \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2.$$

Il est facile de démontrer maintenant que

$$\nu = 2z_0.$$

⁽¹⁾ HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 119; 1886.

En effet, si cette égalité est exacte, nous devons avoir

$$p'v = -2pz_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{p''z_0}{p'z_0} \right)^2,$$

$$\sigma_2 = a^2 + \alpha_2 - \frac{1}{4} \left[\frac{3(a^2 + \alpha_2)^2 - \alpha_4 - 3\alpha_2^2}{2(a^3 + 3\alpha_2a + \alpha_3)} \right]^2$$

ou

$$\pm 2a = \frac{3a^4 + 6\alpha_2a - \alpha_4}{2(a^3 + 3\alpha_2a + \alpha_3)}.$$

Si dans le membre gauche nous donnons à $2a$ le signe $+$, nous aurons

$$a^4 + 6\alpha_2a^2 + 4\alpha_3a + \alpha_4 = 0$$

et cette égalité est identiquement exacte; par conséquent, le lien cherché entre les deux formes d'inversion est trouvé.

13. La forme d'inversion précédemment trouvée nous donne la possibilité d'étudier facilement une transformation intéressante que nous avons indiquée dans notre *Mémoire Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel* ⁽¹⁾. Posons

$$(21) \quad \sqrt{y^4 + 6\alpha_2y^2 + 4\alpha_3y + \alpha_4} = \sqrt{J(y)} = (y^2 + 3\alpha_2) - \frac{2}{\xi}.$$

En chassant ici le radical et le dénominateur nous aurons l'équation doublement quadratique

$$(4\alpha_3y + \alpha_4 - 9\alpha_2^2)\xi^2 + 4(y^2 + 3\alpha_2)\xi - 4 = 0$$

ou

$$4\xi y^2 + 4\alpha_3\xi^2y + (\alpha_4 - 9\alpha_2^2)\xi^2 + 12\alpha_2\xi - 4 = 0.$$

De ces équations, suivant un théorème connu ⁽²⁾, nous tirons, sans difficulté, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{J(y)}} = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha_3^2\xi^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)\xi^3 - 12\alpha_2\xi^2 + 4\xi}},$$

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}} = \pm \frac{1}{\alpha_3} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{\alpha_3^2}\xi^3 - \frac{12\alpha_2}{\alpha_3^2}\xi^2 + \frac{4}{\alpha_3^2}\xi}}.$$

⁽¹⁾ *Journal de Jordan*, 4^e série, t. VI; 1890.

⁽²⁾ HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 333; 1888.

Etendant à l'intégrale

$$\alpha_3 z = \alpha_3 \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{\alpha_3^2} \xi^3 - \frac{12\alpha_2}{\alpha_3^2} \xi^2 + \frac{4}{\alpha_3^2} \xi}}$$

les formules d'inversion trouvées au n° 10, nous avons

$$\xi = \frac{p'(u_0)}{p(\alpha_3 z) - p(u_0)}.$$

Afin de trouver $p'(u_0)$ il faut calculer le quart de la dérivée du polynôme placé sous le radical et remplacer ξ par zéro (racine du polynôme), nous aurons

$$p'(u_0) = \frac{1}{\alpha_3};$$

de même

$$p(u_0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_3^2}.$$

En outre, les invariants nouveaux g'_2, g'_3 seront donnés au moyen des formules

$$g'_2 = \frac{3\alpha_2^2 + \alpha_4}{\alpha_3^4} = \frac{1}{\alpha_3^4} g_2,$$

$$g'_3 = \frac{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2}{\alpha_3^6} = \frac{1}{\alpha_3^6} g_3.$$

Ayant recours aux formules connues d'homogénéité, nous aurons

$$p(\alpha_3 z, \frac{1}{\alpha_3^4} g_2, \frac{1}{\alpha_3^6} g_3) = \frac{1}{\alpha_3^2} p(z, g_2, g_3);$$

par conséquent

$$\xi = \frac{1}{pz - \alpha_2}$$

ou

$$\alpha_3 \xi = \eta = \frac{\alpha_3}{pz - \alpha_2},$$

c'est-à-dire

$$\eta = \frac{p'(2z_0)}{pz - p(2z_0)}.$$

En définitive, nous avons le théorème :

THÉORÈME. — On donne l'intégrale

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4}},$$

laquelle fournit

$$y - y_1 = \frac{p'(z_0)}{pz - p(z_0)}.$$

Si nous employons la substitution

$$(22) \quad \sqrt{y^4 + 6\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4} = y^2 + 3\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\eta},$$

il se trouve que

$$z = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{\alpha_3} \eta^3 + 12\alpha_2 \eta^2 + 4\alpha_2 \eta}}$$

qui donne

$$\eta = \frac{p'(2z_0)}{pz - p(2z_0)};$$

les invariants g_2, g_3 ne subissent pas de changement.

De cette façon, la substitution (22) fournit la duplication de l'argument z_0 sans altération des invariants.

REMARQUES SUR L'INVERSION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES

(Nouv. Ann. de math., 3^e série, t. XIX, 1900, pp. 390-392)

En exécutant l'inversion de l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

il est facile de se heurter à un cas qui semble, au premier abord, présenter une contradiction inexplicable.

Admettons, avec Halphen ⁽¹⁾, que

$$x^2 = z + \frac{1}{1+k^2};$$

nous aurons alors

$$u = \sqrt{\lambda} \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

$$\lambda^2 g_2 = \frac{4}{3} (1 - k^2 + k^4);$$

$$\lambda^3 g_3 = -\frac{1}{27} (1 + k^2) (2 - k^2) (1 - 2k^2) \quad (2),$$

donc

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{108(1 - k^2 + k^4)^3}{(1 + k^2)^2 (2 - k^2)^2 (1 - 2k^2)^2}.$$

De pareilles formules expriment directement les invariants g_2 et g_3 en fonction du module k .

⁽¹⁾ HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 23.

⁽²⁾ *Ibid.*, t. I, p. 60.

Si maintenant à l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 x^4 - (1 + k^2)x^2 + 1}},$$

nous appliquons les formules connues de l'inversion des intégrales elliptiques et si nous calculons, conformément à ces dernières, les invariants g_2 et g_3 , nous trouverons

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{S}{a_0^2} = \frac{k^4 + 14k^2 + 1}{12k^4}, \\ g_3 &= \frac{T}{a_0^3} = \frac{k^6 - 33k^4 - 33k^2 + 1}{216k^6}, \\ \frac{g_2^3}{g_3^2} &= 27 \frac{(k^4 + 14k^2 + 1)^3}{(k^6 - 33k^4 - 33k^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

En comparant les deux résultats obtenus, nous remarquerons leur parfaite dissemblance. Il est donc indispensable de trouver un lien entre ces deux résultats et d'éclaircir cette contradiction apparente. Dans ce but, avant de calculer les invariants

$$g_2 \quad \text{et} \quad g_3,$$

d'après les formules d'inversion, soumettons l'argument u à une transformation de Landen. Grâce à ce procédé, le module k sera remplacé, comme on le sait, par

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

et nous aurons

$$u = \frac{1}{1+k} \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

Maintenant si nous faisons

$$y^2 = \frac{1}{\xi + \frac{1+e^2}{3}},$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{\lambda_1}}{1+k} \int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - G_2\xi - G_3}}, \\ \frac{\lambda_1^2}{(1+k)^4} G_2 &= \frac{4}{3} (1 - e^2 + e^4), \\ \frac{\lambda_1^2}{(1+k)^6} G_3 &= -\frac{4}{27} (1 + e^2) (2 - e^2) (1 - 2e^2), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{G_2^3}{G_3^2} = \frac{108(1 - e^2 + e^4)^3}{(1 - e^2)^2 (2 - e^2)^2 (1 - 2e^2)^2};$$

ou, en introduisant dans cette formule la valeur

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

nous aurons

$$\frac{G_2^3}{G_3^2} = \frac{27(k^4 + 14k^2 + 1)^3}{(k^6 - 33k^4 - 33k^2 - 1)^2}.$$

Ainsi le lien entre les deux résultats est établi, et la transformation de Landen trouve sa source dans la nature même des intégrales elliptiques.

SUR UN CAS DE RÉDUCTIBILITÉ DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXV, 1901, pp. 114-116)

1. Je me propose ici de donner quelques nouveaux exemples de la réductibilité des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Suivant la méthode, exposée ci-après, on peut former un grand nombre d'intégrales réductibles ; entre autres, entrera dans cette catégorie le cas indiqué par Hermite ⁽¹⁾.

Prenons l'équation

$$(1) \quad x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = y^2,$$

définissant entre x et y une dépendance du premier genre. Si nous considérons x comme une fonction de y , les points critiques seront donnés par l'équation

$$(2) \quad x^2 + 2ax + b = 0,$$

dont nous désignerons les racines par x_1, x_2 , de sorte que

$$x_1 + x_2 = -2a, \quad x_1 x_2 = b.$$

Par conséquent, l'équation (1) fournit deux nouvelles équations

$$(x - x_1)^2 (x + 3a + 2x_1) = y^2 - c + 2x_1^3 + 3ax_1^2,$$

$$(x - x_2)^2 (x + 3a + 2x_2) = y^2 - c + 2x_2^3 + 3ax_2^2.$$

Multipliant ces équations et remplaçant les fonctions symétriques des quantités x_1, x_2 par les coefficients de l'équation (2), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (x^2 + 2ax + b)^2 (x^2 + 2ax + 4b - 3a^2) \\ &= y^4 + (5ab - 4a^3 - 2c)y^2 + (4a^3c - 3a^2b + 4b^3 - 5abc), \end{aligned}$$

(1) PICARD. *Traité d'Analyse*, t. II, p. 218.

d'où

$$(x^2 + 2ax + b) \sqrt{x^2 + 2ax + 4b - 3a^2} \\ = \sqrt{y^4 + (5ab - 4a^3 - 2c)y^2 + (4a^3c - 3a^2b + 4b^3 - 5abc)}.$$

Différentiant l'équation (1), nous avons

$$\frac{3}{2} \frac{x^2 + 2ax + b}{\sqrt{x^3 + 3ax^2 + 3bx + c}} = dy.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3 + 3ax^2 + 3bx + c)(x^2 + 2ax + 4b - 3a^2)}} \\ = \frac{2}{3} \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + (5ab - 4a^3 - 2c)y^2 + (4a^3c - 3a^2b + 4b^3 - 5abc)}}.$$

Posant ici

$$a = 0.$$

nous avons le cas indiqué par Hermite

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x^3 + 3bx + c)(x^2 - 4b)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 - 2cy^2 + 4b^3}}.$$

2. Prenons maintenant l'équation

$$(4) \quad x^4 + 2ax^2 + 4bx = y,$$

définissant entre x et y une dépendance unicursale. Si nous considérons x comme une fonction de y , les points critiques de l'équation (4) seront donnés par l'équation

$$(5) \quad x^3 + ax + b = 0,$$

dont nous désignerons les racines par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3,$$

de sorte que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a, \quad x_1x_2x_3 = -b.$$

De l'équation (4) nous tirerons trois nouvelles équations

$$(x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 2a + 3x_1^2) = y + (3x_1^4 + 2ax_1^2), \\ (x - x_2)^2(x^2 + 2x_2x + 2a + 3x_2^2) = y + (3x_2^4 + 2ax_2^2), \\ (x - x_3)^2(x^2 + 2x_3x + 2a + 3x_3^2) = y + (3x_3^4 + 2ax_3^2).$$

Multipliant ces équations et remplaçant les fonctions symétriques des racines par les coefficients de l'équation (5), nous obtenons

$$(x^3 + ax + b) \sqrt{x^6 + 4ax^4 + 10bx^3 + 5a^2x^2 + 18abx + 2a^3 + 27b^2} \\ = \sqrt{y^3 + 2a^2y^2 + (a^4 + 18ab^2)y + 2a^3b^2 + 27b^4}.$$

Différentiant maintenant l'équation (4), nous trouvons

$$4(x^3 + ax + b)dx = dy.$$

C'est pourquoi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 4ax^4 + 10bx^3 + 5a^2x^2 + 18abx + 2a^3 + 27b^2}} \\ = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + 2a^2y^2 + (a^4 + 18ab^2)y + 2a^3b^2 + 27b^4}}.$$

Si $a = 0$, nous obtenons un exemple intéressant par sa simplicité

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 10bx^3 + 27b^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + 27b^4}}.$$

Ici la réduction s'obtient par la substitution

$$x^4 + 4bx = y.$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 10bx^3 + 27c}}$$

se ramène à une intégrale elliptique

$$c = b^2.$$

**RECHERCHE ANALYTIQUE
SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES
ABÉLIENNES**

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXVII, 1903, pp. 144-161)

1. — Admettons que l'intégrale hyperelliptique

$$(1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u$$

peut être réduite en intégrale elliptique au moyen de la substitution

$$(2) \quad \varphi(x) = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré i ,

$$(3) \quad R(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_j) \dots (x - x_n).$$

Pour déterminer le facteur numérique λ nous admettons dans les équations (1) et (2) $x = \infty$ et trouvons

$$\lambda = \left(\frac{2}{n-2} \right)^2.$$

L'équation (1) nous montre que pour $x = \infty$ nous aurons un développement de x avec la partie principale $(u)^{-\frac{2}{n-2}}$; de l'équation (2) nous aurons un développement de x avec la partie principale $(u)^{-\frac{2}{i}}$; donc

$$i = n - 2.$$

L'équation (1) nous montre également qu'à chaque point de ramification $(x - x_j) = 0$, x est une fonction holomorphe de l'argu-

ment u , et la partie principale de développement de $(x - x_j)$ sera $(u - \omega_j)^2$. De l'équation (2) nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi(x_j) + (x - x_j)\varphi'(x_j) + \frac{1}{2}(x - x_j)^2\varphi''(x_j) + \dots \\ = \lambda[p(\omega_j) + (u - \omega_j)p'(\omega_j) + \frac{1}{2}(u - \omega_j)^2p''(\omega_j) + \dots]. \end{aligned}$$

En posant

$$p'(\omega_j) = 0.$$

nous avons seulement deux cas distincts. Le premier cas, quand $x = x_j$, est un point de ramification, c'est-à-dire une racine de l'équation (3), et le second cas, quand $x = x_j$ est une racine de l'équation

$$(4) \quad \varphi'(x) = 0.$$

Dans les deux cas ω_j est une demi-période de l'intégrale elliptique u ; donc

$$p(\omega_j) = e_j, \quad \varphi(x_j) = \lambda e_j,$$

e_j étant une racine de l'équation

$$4z^2 - g_2z - g_3 = 0.$$

Ainsi les racines de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_j = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

satisfont ou à l'équation (3), ou à l'équation (4); donc

$$(5) \quad \varphi(x) - \lambda e_j = (x - x'_j)(x - x''_j)\dots(\xi - x'_j)^2(x + \xi''_j)^2\dots;$$

où

$$x'_j, \quad x''_j, \quad x'''_j \quad \dots$$

sont les racines de l'équation (3);

$$\xi'_j, \quad \xi''_j, \quad \xi'''_j, \quad \dots$$

sont celles de l'équation (4).

Comme les équations

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = 0, \quad \varphi(x) - \lambda e_2 = 0, \quad \varphi(x) - \lambda e_3 = 0$$

ne peuvent pas avoir des racines communes, le produit

$$[\varphi(x) - \lambda e_1][\varphi(x) - \lambda e_2][\varphi(x) - \lambda e_3]$$

diffère du produit

$$[\varphi'(x)]^2 R(x)$$

par un facteur numérique qui peut être toujours aisément trouvé. Le théorème démontré ci-dessus peut servir pour trouver toutes les intégrales hyperelliptiques réduisant aux elliptiques par des substitutions entières. Le calcul est très simple, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple. — Étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x^5+5ax^3+5bx^2+5cx+d)}} = u;$$

il s'agit de choisir

$$\alpha, \beta, a, b, c, d,$$

de manière que l'intégrale u puisse se réduire à une intégrale elliptique au moyen d'une substitution entière

$$\varphi(x) = x^5 + kx^4 + lx^3 + mx^2 + nx + q = \lambda p(u, g_2, g_3).$$

En désignant les racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

par

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4,$$

nous avons les deux combinaisons possibles :

$$(I) \quad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda e_1 = (x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2(x - \alpha), \\ \varphi(x) - \lambda e_2 = (x - \xi_3)^2(x - \xi_4)^2(x - \beta), \\ \varphi(x) - \lambda e_3 = x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d; \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda e_1 = (x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2(x - \alpha), \\ \varphi(x) - \lambda e_2 = (x - \xi_3)^2(x - \beta)(x - x_1)(x - x_2), \\ \varphi(x) - \lambda e_3 = (x - \xi_4)^2(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5), \end{cases}$$

où

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

sont les racines du polynôme

$$(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d).$$

De la combinaison (I) nous concluons que le produit

$$[\varphi(x) - \lambda e_1][\varphi(x) - \lambda e_2] = \varphi^2(x) + \lambda e_3 \varphi(x) + \lambda^2 e_1 e_2$$

est divisible par

$$\varphi'^2(x) = 5^2(x^4 + 3ax^2 + 2bx + c)^2.$$

Cette condition nous donne

$$\begin{aligned} (1) \quad & b = 0, \\ (2) \quad & c = a^2 \\ (3) \quad & \lambda e_3 = -\frac{2}{3} d. \\ (4) \quad & \lambda^2 e_1 e_2 = \frac{1}{9} d^2 + 4a^5, \\ (5) \quad & (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + 4a. \end{aligned}$$

Des équations

$$\lambda e_3 = -\lambda(e_1 + e_2) = -\frac{2}{3} d, \quad \lambda^2 e_1 e_2 = \frac{1}{9} d^2 + 4a^5$$

nous trouvons

$$\lambda e_1 = \frac{1}{3} d + 2a^2 \sqrt{-a}, \quad \lambda e_2 = \frac{1}{3} d - 2a^2 \sqrt{-a};$$

par conséquent

$$\begin{aligned} (6) \quad & \frac{\lambda^3}{4} g_3 = -\left(\frac{2}{27} d^3 + \frac{8}{3} a^5 d\right), \\ (7) \quad & \frac{\lambda^2}{4} g^2 = \frac{1}{3} d^2 - 4a^5. \end{aligned}$$

L'intégrale réductible sera

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + d)}} \\ &= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \left(5^4 a^5 - \frac{5^4}{2^2 \cdot 3} d^2\right)z + \left(\frac{5^6}{6^3} d^3 + \frac{5^6}{6} a^5 d\right)}}. \end{aligned}$$

Cette intégrale a une grande analogie avec l'intégrale très connue de M. Hermite ⁽¹⁾.

Citons encore un exemple

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^7 + 7ax^5 + 14a^2x^3 + 7a^3x + f)}} \\ &= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^2 + 6^4 \left(a^7 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} f^2\right)z + \frac{7^6}{2 \cdot 3} \left(a^7 f + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} f^3\right)}}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ E. PICARD. *Traité d'Analyse*, 1^{re} éd., t. II, p. 218. — KÖNIGSBERGER, *Journal de Borchardt*, t. LXXXV, p. 276. — GOURSAT, *Bull. de la Soc. math.*, t. XIII.

Les intégrales réductibles de cette catégorie, facile à former, sont en nombre infini.

2. La théorie que nous venons d'exposer peut être appliquée avec le plus de succès aux intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{R(x)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[6]{R(x)}}.$$

L'intégrale

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)}} = u,$$

sous certaines conditions, peut être réduite en une intégrale elliptique au moyen de la substitution

$$(7) \quad \varphi(x) = \lambda p'(u, 0, g_3).$$

Examinons d'abord le cas le plus simple, quand $\varphi(x)$ est une fonction entière. L'équation (6) nous démontre que pour $x = \infty$ nous avons un développement de x avec la partie principale

$$(u)^{-\frac{3}{n-3}};$$

n est le degré du polynôme $R(x)$; quant à l'équation (7), cette dernière donne pour $x = \infty$ un développement avec la partie principale

$$(u)^{-\frac{3}{i}};$$

i est le degré du polynôme $\varphi(x)$; par conséquent

$$i = n - 3.$$

Le polynôme $R(x)$ peut renfermer des facteurs linéaires $(x - x_i)$ et des facteurs carrés $(x - x_j)^2$. Au voisinage du point $x - x_i = 0$ nous aurons un développement de $(x - x_i)$ avec la partie principale

$$(u - \omega_i)^{\frac{3}{2}}.$$

L'équation (7) donne

$$\begin{aligned} \varphi(x_i) + (x - x_i)\varphi'(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)^2\varphi''(x_i) + \dots \\ = \lambda[p'(\omega_i) + (u - \omega_i)p''(\omega_i) + \frac{1}{2}(u - \omega_i)^2p'''(\omega_i) + \dots]. \end{aligned}$$

Il est évident que nous devons avoir

$$\begin{aligned} \varphi(x_i) &= \lambda p'(\omega_i), & \varphi'(x_i) &= 0, & \varphi''(x_i) &\neq 0, \\ p''(\omega_i) &= 0, & p'''(\omega_i) &= 0, & p^{iv}(\omega_i) &\neq 0. \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$p(\omega_i) = 0, \quad p'(\omega_i) = \pm \sqrt{-g_3}, \quad \varphi(x_i) = \pm \lambda \sqrt{-g_3}.$$

L'équation (6) nous montre que pour $x - x_j = 0$ nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale $(u - \omega_j)^3$; quant à l'équation (7), cette dernière nous donne :

$$\begin{aligned} \varphi(x_j) + (x - x_j)\varphi'(x_j) + \frac{1}{2}(x - x_j)^2\varphi''(x_j) + \dots \\ = \lambda[p'(\omega_j) + (u - \omega_j)p''(\omega_j) + \frac{1}{2}(u - \omega_j)^2p'''(\omega_j) \\ + \frac{1}{1.2.3}(u - \omega_j)^3p^{iv}(\omega_j) + \dots]; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi(x_j) &= \lambda p'(\omega_j), & \varphi'(x_j) &\neq 0, \\ p''(\omega_j) &= 0, & p'''(\omega_j) &= 0, & p^{iv}(\omega_j) &\neq 0, \\ p'(\omega_j) &= \pm \sqrt{-g_3}, & \varphi(x_j) &= \pm \lambda \sqrt{-g_3}. \end{aligned}$$

Ainsi toutes les racines du polynôme $R(x)$ satisfont à l'équation

$$(8) \quad \varphi^2(x) + \lambda^2 g_3 = 0.$$

En n'admettant que le cas où l'équation (8) n'a que des racines simples et doubles, posons

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\alpha)(x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_\beta)^2.$$

Nous avons

$$\alpha + 2\beta = n,$$

et de l'équation (8) nous obtiendrons

$$2\alpha + \beta = 2n - 6;$$

donc

$$\alpha = n - 4, \quad \beta = 2.$$

Par conséquent, la forme de l'équation (8) est complètement déterminée; ainsi que la forme de l'intégrale réductible. Nous

avons en effet

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-x_1) \dots (x-x_\alpha)(x-\xi_1)^2 \dots (x-\xi_\beta)^2}},$$

$$\varphi^2(x) + \lambda^2 g_3 = (x-x_1)^2 \dots (x-x_\alpha)^2 (x-\xi_1) \dots (x-\xi_\beta),$$

$$\varphi'(x) = A(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_{n-4}),$$

$$\alpha = n-4, \quad \beta = 2,$$

A étant un facteur numérique.

Exemple. — Soit $n = 8$; alors

$$\alpha = 4, \quad \beta = 2.$$

Étant donnée une intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d)(x^2 + 2kx + l)^2}} = u.$$

Il s'agit de trouver les conditions de réductibilité de cette intégrale au moyen d'une substitution entière

$$\varphi(x) = \lambda p'(u, 0, g_3).$$

Il est évident qu'ici

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 10cx^2 + 5dx + e; \\ (x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 10cx^2 + 5dx + e)^2 + \lambda^2 g_3 \\ &= (x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d)^2 (x^2 + 2kx + l). \end{aligned}$$

De cette identité nous aurons :

$$\begin{array}{ll} (1) & k = a, & (4) & d = 4b^2 - 2a^2b = a^4, \\ (2) & l = 8b - 7a^2, & (5) & e = 11a^5 - 30a^3b + 20ab^2, \\ (3) & c = 3ab - 2a^3, & (6) & \lambda^2 g_3 = -2^7(a^2 - b)^5. \end{array}$$

En ce qui concerne le facteur numérique λ , il peut être trouvé au moyen des équations (6) et (7) dans lesquelles il faut admettre $x = \infty$; ainsi nous trouverons

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{n-3} \right)^3;$$

par conséquent

$$g_3 = -\frac{2^9 5^6}{3^6} (a^2 - b)^5.$$

L'intégrale réductible sera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4(3ab - 2a^3)x + 4b^2 - 2a^2b - a^4][x^2 + 2ax + 8b - 7a^2]}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \frac{2^9 \cdot 5^6}{3^6}(a^2 - b)^5}}.$$

La réduction s'effectuera au moyen de la substitution

$$x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 10(3ab - 2a^3)x^2 + 5(4b^2 - 2a^2b - a^4)x + 11a^5 - 30a^3b + 20ab^2 = \frac{3^3}{2 \cdot 5^3} p'(u, 0, g_3).$$

3. Les plus simples cas de réduction des intégrales

$$(9) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u$$

s'effectuent au moyen de la substitution

$$(10) \quad \varphi(x) = \lambda p^2(u, g_2, 0),$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme. Il est facile de s'expliquer que, si le degré du polynôme $R(x)$ est n , le degré du polynôme $R(x)$ sera $(n - 4)$. La fonction entière $R(x)$ peut avoir des facteurs de la forme $(x - x_i)$, ou enfin $(x - x_j)^3$, ou enfin $(x - x_k)^2$. L'équation (9) nous montre qu'au voisinage du point $x - x_i = 0$ nous aurons le développement de $(x - x_i)$ avec la partie principale $(u - \omega_i)^{\frac{1}{3}}$. L'équation (10) nous donne

$$\varphi(x_i) + (x - x_i)\varphi'(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)^2\varphi''(x_i) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - x_i)^3\varphi'''(x_i) + \dots$$

$$= \lambda[p(\omega_i) + (u - \omega_i)p'(\omega_i) + \frac{1}{2}(u - \omega_i)^2p''(\omega_i) + \dots]^2.$$

D'où il suit que

$$\varphi(x_i) = 0, \quad \varphi'(x_i) = 0, \quad \varphi''(x_i) = 0, \quad \varphi'''(x_i) \neq 0;$$

$$p(\omega_i) = 0, \quad p'(\omega_i) = 0, \quad p''(\omega_i) \neq 0.$$

Donc $x = x_i$ est une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

et $\varphi(x)$ doit avoir la forme

$$\varphi(x) = (x - x_i)^3\varphi_1(x); \quad \varphi_1(x_i) \neq 0.$$

Au voisinage du point de ramification $x = x_j$ nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale $(u - \omega_j)^4$.

De l'équation (10) nous déduisons

$$\begin{aligned} \varphi(x_j) + (x - x_j)\varphi'(x_j) + \frac{1}{2}(x - x_j)^2\varphi''(x_j) + \dots \\ = \lambda[p(\omega_j) + (u - \omega_j)p'(\omega_j) + \frac{1}{2}(u - \omega_j)^2p''(\omega_j) + \dots]^2; \end{aligned}$$

ce qui nous montre que $x = x_j$ satisfait aux conditions

$$\varphi(x_j) = 0, \quad \varphi'(x_j) \neq 0,$$

donc x_j est une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

et $\varphi(x)$ doit admettre la forme suivante

$$\varphi(x) = (x - x_j)\varphi_2(x); \quad \varphi_2(x_j) \neq 0.$$

Au voisinage du point de ramification $x = x_k$ nous aurons

$$p(\omega_k) \neq 0, \quad \varphi(x_k) = \lambda p^2(\omega_k), \quad \varphi'(x_k) \neq 0, \quad p'(\omega_k) = 0;$$

donc

$$\varphi'(x_k) = \frac{1}{4} \lambda g_2.$$

Si

$$R(x) = (x^\alpha + \dots)(x^\beta + \dots)^3(x^\gamma + \dots)^2,$$

la forme la plus simple du polynôme $\varphi(x)$ sera

$$\varphi(x) = (x^\alpha + \dots)^3(x^\beta + \dots).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= n, \\ 3\alpha + \beta &= n - 4. \end{aligned}$$

Exemple. — Soit $n = 8$; un cas seul y est possible

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2.$$

Étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3(x^2+2cx+d)^2}} = u,$$

nous avons

$$\varphi(x) = (x-a)^3(x-b) = \lambda p^2(u), \quad \lambda = \left(\frac{4}{n-4}\right)^4 = 1.$$

En différentiant cette égalité, élevant le résultat obtenu au quatrième degré, nous obtiendrons

$$\left(x - \frac{a + 3b}{4}\right)^2 (x^2 + 2cx + d) = (x - a)^3 (x - b) - \frac{1}{4} g_2.$$

Ce qui nous donne

$$(1) \quad c = \frac{b - 5a}{4}, \quad (3) \quad g_3 = -\frac{3^3}{4^3} (a^2 - b)^4.$$

$$(2) \quad d = \frac{27a^2 - 15ab + 3b^2}{16},$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3 \left[x^2 + \frac{b-5a}{2}x + \frac{27a^2 - 14ab + 3b^2}{16} \right]^2}} \\ = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \frac{3^3}{4^3} (a^2 - b)^4}}. \end{aligned}$$

Citons encore deux exemples

$$(I) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + b)^3}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{3^4}{2^4} (a^3 - b)^2}}.$$

La réduction s'effectue à l'aide de la substitution

$$\varphi(x) = (x+a)^3 (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + b) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 p^2(u, g_2, 0).$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2ax + b)[x^4 + 4ax^3 + (3a^2 + b)x^2 + (6ab - 2a^3)x + (a^4 - 3a^2b + 2b^2)]^2}} \\ = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{3^4}{2^2} (a^3 - b)^2}}. \end{aligned} \right.$$

La réduction s'effectue à l'aide de la substitution

$$\varphi(x) = (x^2 + 2ax + b)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 p^2(u, g_2, 0).$$

4. Les intégrales de la forme

$$(11) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[6]{R(x)}} = u$$

peuvent être réduites aux intégrales elliptiques au moyen de la substitution

$$(12) \quad \varphi(x) = \lambda p^3(u, 0, g_3).$$

Si $\varphi(x)$ est un polynôme, son degré doit être $(n - 6)$. Il est aisé de se convaincre que $R(x)$ ne peut contenir des facteurs linéaires aux degrés premier et cinquième. En effet, si $R(x)$ contient le facteur $(x - x_i)$, conformément à l'équation (11), nous aurons un développement de $(x - x_i)$ avec la partie principale $(u - \omega_i)^{\frac{6}{5}}$.

L'équation (12) nous donne

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_i) + (x - x_i)\varphi'(x_i) + \dots + \frac{(x - x_i)^5}{1.2.3.4.5} \varphi^{(5)}(x_i) + \dots \\ &= \lambda [p(\omega_i) + (u - \omega_i)p'(\omega_i) + \frac{1}{2}(u - \omega_i)^2 p''(\omega_i) + \frac{1}{1.2.3}(u - \omega_i)^3 p'''(\omega_i) + \dots]^3. \end{aligned} \right.$$

Pour que le dit développement, avec la partie principale $(u - \omega_i)^{\frac{6}{5}}$, puisse avoir lieu, il faut que nous ayons simultanément

$$p(\omega_i) = 0, \quad p'(\omega_i) = 0, \quad p''(\omega_i) = 0,$$

ce qui, évidemment, ne peut avoir lieu. De même nous pourrions nous convaincre que $R(x)$ ne peut contenir des facteurs de la forme $(x - x_i)^5$. Si $R(x)$ contient un facteur de la forme $(x - x_i)^2$, conformément à l'équation (12), au voisinage du point $x - x_i = 0$ doit avoir lieu un développement de $(x - x_i)$ avec la partie principale $(u - \omega_i)^{\frac{3}{2}}$. L'équation (13) nous montre que, pour que ce cas puisse avoir lieu, il faut avoir

$$\begin{aligned} \varphi(x_i) = 0, \quad \varphi'(x_i) = 0, \quad \varphi''(x_i) \neq 0, \\ p(\omega_i) = 0, \quad p'(\omega_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, il faut qu'à chaque facteur de la fonction $R(x)$ de la forme $(x - x_i)^2$ corresponde un facteur $(x - x_i)^2$ de la fonction $\varphi(x)$. Admettons maintenant que $R(x)$ contienne le facteur $(x - x_j)^4$. L'équation (11) nous montre qu'au point de ramification $x - x_j = 0$ nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale $(u - \omega_j)^3$. Donc il en suit

$$\varphi(x_j) = 0, \quad \varphi'(x_j) \neq 0, \quad p(\omega_j) = 0, \quad p'(\omega_j) \neq 0.$$

Admettons enfin que $R(x)$ contienne un facteur $(x - x_k)^3$. Au voisinage du point de ramification $x - x_k = 0$ nous avons un

développement de $(x - x_k)$ avec la partie principale $(u - \omega_k)^2$;
donc

$$\varphi(x_k) = \lambda p^3(\omega_k), \quad p'(\omega_k) = 0;$$

donc

$$\varphi(x_k) - \frac{1}{4} \lambda g_3 = 0,$$

par conséquent le polynôme $\varphi(x) - \frac{1}{4} \lambda g_3$ doit être divisible par tous les facteurs $(x - x_k)$. En désignant par α le nombre des facteurs triples et par γ le nombre des facteurs quaternaires, nous obtiendrons

$$R(x) = (x^\alpha + \dots)^2 (x^\beta + \dots)^3 (x^\gamma + \dots)^4.$$

La forme la plus simple de $\varphi(x)$ sera

$$\varphi(x) = (x^\alpha + \dots)^2 (x^\gamma + \dots).$$

Les nombres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

satisfont aux équations

$$2\alpha + 4\beta + 3\gamma = n, \quad 2\alpha + \beta = n - 6.$$

Exemple. — Soit $n = 9$. Nous avons

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \lambda = \left(\frac{6}{n-6} \right)^6 = 2^6.$$

Nous aurons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+a)^2 (x+b)^4 (x+c)^3}} = u.$$

Admettons

$$(x+a)^2 (x+b) = \lambda p^3(u, 0, g_3).$$

De cette équation nous obtiendrons

$$\left(x + \frac{a+2b}{3} \right)^2 (x+c) = \left[(x+a)^2 (x+b) - \frac{1}{4} g_3 \lambda \right].$$

D'où il suit que

$$(1) \quad c = \frac{4a-b}{3}, \quad (2) \quad g_3 = -\frac{1}{4} (a-b)^3.$$

Nous avons

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+a)^2 (x+b)^4 \left(x + \frac{4a-b}{3} \right)^3}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \frac{1}{4} (a-b)^3}}.$$

5. Passons maintenant à l'étude des conditions de réductibilité des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques, au moyen des substitutions fractionnaires et rationnelles. Etudions l'intégrale

$$(14) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^5 + x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}} = u,$$

Admettons que la réduction puisse se faire au moyen de la substitution suivante :

$$(15) \quad \varphi(x) = \frac{f_\alpha(x)}{f_\beta(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

où α, β sont les degrés du polynôme $f_\alpha(x), f_\beta(x)$. En admettant dans l'équation (14) $x = \infty$, nous verrons que x se développe en une série avec la partie principale u^{-2} . L'équation (15) nous montre que la partie principale du même développement sera $(u)^{-\frac{2}{\alpha-\beta}}$; donc

$$\alpha - \beta = 1.$$

Il suit de l'équation (14) qu'au voisinage du point $x = 0$ nous avons un développement de x avec la partie principale $u^{\frac{1}{2}}$. L'équation (15) nous donne

$$\varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \dots = \lambda[p(\omega_0) + (u - \omega_0)p'(x_0) + \dots],$$

d'où il suit que

$$(16) \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) \neq 0.$$

En indiquant les racines de l'équation

$$(17) \quad f_\beta(x) = 0$$

par

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_\beta,$$

nous verrons que, pour $x = x_j$, nous avons nécessairement $u = 0$ et qu'au voisinage du point $x = x_j = 0$ nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale u^2 . Il en résulte que toutes les racines simples de l'équation (17) sont des points de ramification. Les racines doubles de l'équation (17) ne sont que des points ordinaires. L'équation (17) ne peut pas contenir de racines de plus haute multiplicité. Nous n'étudierons que le cas où l'équa-

tion (17) ne contient pas de racines multiples. Dans ce cas, la fonction $f_\beta(x)$ est un diviseur du polynôme

$$(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e).$$

Il faut donc étudier tous les cas qui s'y rapportent.

Premier cas. — Etant donnée une intégrale

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(x^4 - bx^2 + cx + d)}} = u,$$

il s'agit de trouver les conditions de réductibilité de cette intégrale à une intégrale elliptique au moyen de la substitution

$$\frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + a} = \lambda(pu - e_1).$$

On voit que $\lambda = 4$. Vu l'équation (16) nous aurons

$$\alpha x - \beta = 0, \quad \beta = \alpha x;$$

par conséquent

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \alpha x}{x + a} = 4(pu - e_1), \\ \frac{x^2 + [\alpha + 4(e_1 - e_2)]x + [\alpha x + 4(e_1 - e_2)]}{x + a} = 4(pu - e_2), \\ \frac{x^2 + [\alpha + 4(e_1 - e_3)]x + [\alpha x + 4(e_1 - e_3)]}{x + a} = 4(pu - e_3). \end{cases}$$

Puisque, en outre du point $x + a = 0$, il existe encore quatre points de ramification, déterminés par l'équation

$$(19) \quad x^4 + bx^2 + cx + d = 0,$$

le numérateur d'une des formules (18) doit être un carré parfait; tandis que le produit des deux autres doit être égal au polynôme (19). Si

$$\begin{aligned} & \{ x^2 + [\alpha + 4(e_1 - e_2)]x + [\alpha x + 4a(e_1 - e_2)] \} \\ & \times \{ x^2 + [\alpha + 4(e_1 - e_3)]x + [\alpha x + 4a(e_1 - e_3)] \} = x^4 + bx^2 + cx + d, \end{aligned}$$

nous savons que

$$x^2 + \alpha x + \alpha x$$

est un carré parfait; donc

$$\alpha = 4a.$$

En outre nous trouverons

$$\begin{aligned} (1) \quad e_1 &= -\frac{2}{3}a, & (4) \quad c &= 2ab, \\ (2) \quad -g_3 &= \frac{8}{27}a^3 + \frac{1}{6}ab, & (5) \quad d &= a^2b, \\ (3) \quad g_3 &= \frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{4}b, \end{aligned}$$

L'intégrale réductible sera

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+2abx+a^2b)}} \\ &= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \left(\frac{4}{3}a^2 - \frac{b}{4}\right)z + \left(\frac{8}{27}a^3 + \frac{ab}{b}\right)}}. \end{aligned}$$

La réduction s'effectuera par la substitution

$$\frac{(x+2a)^2}{x+a} = 4\left(pu + \frac{2}{3}a\right).$$

Deuxième cas. — Etant donnée l'intégrale

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^3+3ax+b)}} = u, \quad a \neq 0,$$

Il faut trouver les conditions de sa réductibilité à une intégrale elliptique au moyen de la substitution suivante :

$$(20) \quad \varphi(x) = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + 4a} = \lambda p(u, g_2, g_3).$$

Il est évident que $\lambda = 4$. De l'équation (16) on déduit que

$$\beta = 0.$$

Par conséquent nous aurons

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{x^3 + (\alpha - 4e_1)x^2 + \gamma - 4ae_1}{x^2 + 4a} = 4(pu - e_1), \\ \frac{x^3 + (\alpha - 4e_2)x^2 + \gamma - 4ae_2}{x^2 + 4a} = 4(pu - e_2), \\ \frac{x^3 + (\alpha - 4e_3)x^2 + \gamma - 4ae_3}{x^2 + 4a} = 4(pu - e_3). \end{cases}$$

En posant

$$p(\omega_i) = e_i, \quad p'(\omega_i) = 0,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_i) + (x - \xi_i)\varphi'(\xi_i) + \frac{1}{2}(x - \xi_i)^2\varphi''(\xi_i) + \dots \\ = \lambda[e_i + \frac{1}{2}(u - \omega_i)^2p''(\omega_i) + \dots]. \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\varphi(\xi_i) = 4e_i.$$

Si nous avons $\varphi'(\xi_i) \neq 0$, le point $x = \xi_i$ est un point de ramification. Si au contraire $\varphi'(\xi_i) = 0$, le point $x = \xi_i$ est une racine de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

ou

$$(22) \quad x^3 + 12ax + 8a^2 - 2\gamma = 0.$$

En désignant les racines de l'équation (22) par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3,$$

et les racines de l'équation

$$x^3 + 3ax + b = 0$$

par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3,$$

nous aurons évidemment

$$\begin{aligned} x^3 + (\alpha - 4e_1)x^2 + \gamma - 4ae_1 &= (x - \xi_1)^2(x - x_1), \\ x^3 + (\alpha - 4e_2)x^2 + \gamma - 4ae_2 &= (x - \xi_2)^2(x - x_2), \\ x^3 + (\alpha - 4e_3)x^2 + \gamma - 4ae_3 &= (x - \xi_3)^2(x - x_3). \end{aligned}$$

De ces équations nous obtiendrons facilement

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + \alpha - 4e_1 &= -x_1, \\ 2\xi_2 + \alpha - 4e_2 &= -x_2, \\ 2\xi_3 + \alpha - 4e_3 &= -x_3. \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\begin{aligned} \alpha = 0, \quad \xi_1 = \frac{8}{3}e_1, \quad \xi_2 = \frac{8}{3}e_2, \quad \xi_3 = \frac{8}{3}e_3; \\ x_1 = -\frac{4}{3}e_1, \quad x_2 = -\frac{4}{3}e_2, \quad x_3 = -\frac{4}{3}e_3. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\gamma = 4b, \quad g_2 = -\frac{27}{4}a, \quad g_3 = \frac{27}{16}b;$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^3 + 3ax + b)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \frac{27}{4}az - \frac{27}{16}b}}.$$

La réduction s'effectuera au moyen de la substitution

$$\frac{x^3 + 4b}{x^2 + 4a} = 4p'(u, g_2, g_3) \quad (^1).$$

L'étude des cas de réduction des intégrales abéliennes dépendant des radicaux du troisième, quatrième et sixième degré est réservée pour une autre fois.

(¹) E. PICARD. *Traité d'analyse*, t II, p. 219; KÖNIGSBERGER, *Journal de Borchardt*, t. 85, p. 287.

DE QUELQUES POINTS CONCERNANT LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

(Bull. des Sciences math., 2^e série, t. XXVII, 1903, pp. 299-322)

1. — La méthode que nous avons exposée au sujet de la réduction des intégrales abéliennes ⁽¹⁾ donne la possibilité d'obtenir, avec une extrême simplicité, quelques résultats concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Les résultats que nous avons obtenus à l'aide de la méthode précitée sont indiqués en partie par Halphen dans le *Mémoire Sur la multiplication complète dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$* ⁽²⁾, ainsi que dans ses *Fragments relatifs à la transformation* ⁽³⁾. Néanmoins, la méthode proposée ne sera peut-être pas sans intérêt, tant pour sa simplicité que parce que certains de ces résultats, apparemment, n'ont pas encore attiré l'attention des mathématiciens.

Prenons l'intégrale elliptique

$$(1) \quad \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = u.$$

Il faut satisfaire à l'équation

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g_2}y - \overline{g_3}}},$$

où

$$\overline{g_2}, \quad \overline{g_3}$$

⁽¹⁾ Bulletin des Sciences mathém., 2^e série, t. XXVII, juin 1903.

⁽²⁾ Journal de Mathématiques, 4^e série, t. V.

⁽³⁾ Traité des fonctions elliptiques, etc., t. III, p. 226 et suiv.

sont les invariants inconnus à l'aide de la substitution

$$(2) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = y,$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont les polynômes de degrés i, k .

Nous poserons dorénavant

$$\begin{aligned} x &= p(u, g_2, g_3) = pu, \\ y &= p(u, \overline{g}_2, \overline{g}_3) = \overline{p}u; \end{aligned}$$

les racines du polynôme

$$4x^3 - g_2x - g_3$$

seront désignées par

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3,$$

et les demi-périodes correspondantes de l'intégrale (1) par

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega';$$

les racines de l'équation

$$4y^3 - \overline{g}_2y - \overline{g}_3 = 0$$

seront désignées par

$$\overline{e}_1, \quad \overline{e}_2, \quad \overline{e}_3,$$

et les demi-périodes correspondantes de l'intégrale

$$(3) \quad \int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g}_2y - \overline{g}_3}}$$

par

$$\overline{\omega}, \quad \overline{\omega}', \quad \overline{\omega} + \overline{\omega}'.$$

L'équation (1) nous montre que, aux environs du point $x = \infty$, nous aurons un développement de x avec la partie principale u^{-2} . L'équation (2) nous montre qu'aux environs du point $x = \infty$ a lieu un développement de x avec la partie principale $u^{-\frac{2}{i-k}}$; d'où il suit que

$$i - k = 1.$$

Considérons d'abord le cas où i est un nombre impair, et posons

$$i = 2n + 1, \quad k = 2n.$$

De l'équation (2) il résulte que, lorsque $u = 0$, la partie droite de l'équation devient ∞ ; conséquemment, la partie gauche devient

aussi ∞ ; et cela est possible, outre le cas $x = \infty$, aussi à condition que x soit une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

dont le degré est $2n$. En désignant par x_j une des racines simples du polynôme $\varphi(x)$, nous aurons, au voisinage du point $x - x_j = 0$, un développement du binôme $(x - x_j)$ avec la partie principale u^2 ; par conséquent, $x = x_j$ est un des points de ramification, c'est-à-dire

$$x_j = e_j, \quad \int_{\infty}^{x_j} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \omega_j.$$

Comme x est une fonction monodrome de l'argument u , $\varphi(x)$ peut renfermer seulement des facteurs de deux espèces : ou des facteurs simples $(x - e_j)$ ou des facteurs doubles $(x - x_k)^2$. Et comme le degré du polynôme $\varphi(x)$ égale $2n$, nous devons avoir, ou

$$(1) \quad \varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-1})^2,$$

ou

$$(2) \quad \varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Nous verrons bientôt que la première des deux formes indiquées ne peut avoir lieu, et qu'en conséquence le polynôme $\varphi(x)$ doit être de la forme

$$\varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2,$$

où, parmi les racines

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n,$$

il n'y a aucun point de ramification.

2. L'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \bar{e}_1 = \psi(x) - \bar{e}_1 = 0$$

a $(2n + 1)$ racines. Nous les désignerons par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \dots, \quad \xi_{2n+1}.$$

Développons maintenant la fraction

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x) = \bar{p}u$$

en série au voisinage du point

$$x - \xi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n + 1,$$

Comme

$$\psi(\xi_i) = \bar{e}_1 = \bar{p}(\bar{\omega}), \quad \bar{p}'(\bar{\omega}) = 0,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \psi(\xi_i) + (x - \xi_i)\psi'(\xi_i) + \frac{1}{2}(x - \xi_i)^2\psi''(\xi_i) + \dots \\ = \bar{e}_1 + \frac{1}{2}(u - \bar{\omega})^2\bar{p}''(\bar{\omega}) + \dots \end{aligned}$$

Deux cas seuls sont possibles :

1° Lorsque $\psi'(\xi_i) \neq 0$;

2° Lorsque $\psi'(\xi_i) = 0$.

Dans le premier cas, $x = \xi_i$ est un des points de ramification ; dans le second cas, $x = \xi_i$ est une racine double de l'équation

$$\psi(x) - \bar{e}_1 = 0.$$

Comme x est une fonction monodrome de u , nous aurons, en général,

$$\psi''(\xi_i) \neq 0;$$

par conséquent, le polynôme

$$f(x) - \bar{e}_1\varphi(x)$$

peut avoir des facteurs de deux espèces seulement :

1° Ou $(x - e_i)$;

2° Ou $(x - \xi_i)^2$.

Et comme le degré de ce polynôme est $(2n + 1)$, il peut avoir seulement deux formes :

$$(1) \quad f(x) - \bar{e}_1\varphi(x) = (x - e_1)(x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2,$$

$$(2) \quad f(x) - \bar{e}_1\varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - \xi_1)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2.$$

Il faut en dire autant des polynômes

$$f(x) - \bar{e}_2\varphi(x), \quad f(x) - \bar{e}_3\varphi(x),$$

c'est-à-dire chacun d'eux peut avoir deux formes :

$$(1) \quad f(x) - \bar{e}_2\varphi(x) = (x - e_2)(x - \xi'_1)^2(x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2,$$

$$(2) \quad f(x) - \bar{e}_2\varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - \xi'_1)^2(x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_{n-1})^2$$

$$(1) \quad f(x) - \bar{e}_3\varphi(x) = (x - e_3)(x - \xi''_1)^2(x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_n)^2,$$

$$(2) \quad f(x) - \bar{e}_3\varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - \xi''_1)^2 \dots (x - \xi''_{n-1})^2.$$

Et comme les polynômes

$$f(x) - \bar{e}_1 \varphi(x), \quad f(x) - \bar{e}_2 \varphi(x), \quad f(x) - \bar{e}_3 \varphi(x)$$

n'ont pas de facteurs communs, une seule combinaison est possible

$$(4) \quad \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - e_1)}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2} = \bar{p}u - \bar{e}_1,$$

$$(5) \quad \frac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2 (x - e_2)}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2} = \bar{p}u - \bar{e}_2,$$

$$(6) \quad \frac{(x - \xi''_1)^2 (x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_n)^2 (x - e_3)}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2} = \bar{p}u - \bar{e}_3.$$

Comme

$$\varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2$$

est un carré parfait, en posant

$$\varphi(x) = (\theta x)^2,$$

nous obtiendrons

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{(\theta x)^2};$$

d'où

$$\psi'(x) = \frac{f'(x)\theta(x) - 2f(x)\theta'(x)}{(\theta x)^3}.$$

Au lieu de l'équation

$$\psi'(x) = 0,$$

nous aurons

$$f'(x)\theta(x) - 2f(x)\theta'(x) = 0.$$

Le degré de cette équation est $3n$, et ses racines sont comprises dans le Tableau suivant :

$\xi_1,$	$\xi_2,$	$\dots,$	$\xi_n,$
$\xi'_1,$	$\xi'_2,$	$\dots,$	$\xi'_n,$
$\xi''_1,$	$\xi''_2,$	$\dots,$	$\xi''_n.$

3. Posons

$$\begin{array}{llll} x_1 = p(\alpha_1), & x_2 = p(\alpha_2), & \dots, & x_n = p(\alpha_n), \\ \xi_1 = p(\beta_1), & \xi_2 = p(\beta_2), & \dots, & \xi_n = p(\beta_n), \\ \xi'_1 = p(\beta'_1), & \xi'_2 = p(\beta'_2), & \dots, & \xi'_n = p(\beta'_n), \\ \xi''_1 = p(\beta''_1), & \xi''_2 = p(\beta''_2), & \dots, & \xi''_n = p(\beta''_n). \end{array}$$

Alors

$$(7) \quad \frac{(x - p\beta_1)^2 (x - p\beta_2)^2 \dots (x - p\beta_n)^2 (x - p\omega)}{(x - p\alpha_1)^2 (x - p\alpha_2)^2 \dots (x - p\alpha_n)^2} = \bar{p}u - \bar{e}_1.$$

De l'équation (4), on voit que, pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{p}u = \infty,$$

et pour

$$x = \xi_1, \quad x = \xi_2, \quad \dots, \quad x = \xi_n, \quad x = e_1,$$

il vient

$$y = pu = \bar{e}_1.$$

D'où il suit que les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \dots, \quad \beta_n, \quad \omega$$

sont de la forme

$$(2k + 1)\bar{\omega},$$

k étant un nombre entier. En posant

$$\omega = (2i + 1)\bar{\omega},$$

nous aurons

$$(8) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{2i + 1}.$$

D'autre part, pour

$$x = \infty, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \quad \dots, \quad x = x_n,$$

nous aurons

$$y = \bar{p}u = \infty;$$

par conséquent, les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_n,$$

c'est-à-dire les intégrales

$$\int_{\infty}^{x_i} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \alpha_i$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

sont les périodes de l'intégrale

$$\int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}.$$

Par conséquent les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_n$$

ont la forme suivante

$$\alpha_k = 2k\bar{\omega},$$

k étant un nombre entier. Donc

$$(9) \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\omega}{2i+1}, \quad \alpha_k = \frac{2k\omega}{2i+1}.$$

En outre, il est évident que

$$\frac{2k+1}{2i+1} < 1, \quad \frac{2k}{2i+1} < 1.$$

Parmi les arguments

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \omega, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

il n'y en a point qui soient égaux entre eux. De plus, les arguments

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \omega,$$

ainsi que

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

forment les progressions arithmétiques avec la raison $2\bar{\omega}$; donc nous avons

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\omega}{2n+1}, & \beta_2 &= \frac{3\omega}{2n+1}, & \dots, & \beta_n &= \frac{(2n-1)\omega}{2n+1}, \\ \alpha_1 &= \frac{2\omega}{2n+1}, & \alpha_2 &= \frac{4\omega}{2n+1}, & \dots, & \alpha_n &= \frac{2n\omega}{2n+1}. \end{aligned}$$

Par cette raison

$$\bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(pu - e_1) \left(pu - p \frac{\omega}{2n+1}\right)^2 \left(pu - p \frac{2\omega}{2n+1}\right)^2 \dots \left(pu - p \frac{2n-1}{2n+1} \omega\right)^2}{\left(pu - p \frac{2\omega}{2n+1}\right)^2 \left(pu - p \frac{4\omega}{2n+1}\right)^2 \dots \left(pu - p \frac{2n\omega}{2n+1}\right)^2},$$

ou abrégativement

$$(I) \quad \bar{p}u - \bar{e}_1 = (pu - e_1) \prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{pu - p \left(\frac{2k-1}{2n+1} \omega \right)}{pu - p \left(\frac{2k\omega}{2n+1} \right)} \right)^2.$$

4. La formule (5) montre que, pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{p}u = \infty,$$

et, pour $x = \xi'_1$, il vient

$$y = \bar{p}u = \bar{e}_2.$$

Si l'on change x de $x = \infty$ à $x = \xi'_1$, ensuite de $x = \xi'_1$ à $x = x_1$, alors y passe deux fois par l'infini.

D'où il résulte que l'argument α_1 satisfaisant à l'équation

$$x_1 = p(\alpha_1)$$

doit être défini par la formule

$$\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n+1} + 2k\omega + 2k'\omega' = 2\bar{\omega}.$$

D'où il suit que

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2n+1} + k\omega + k'\omega',$$

k, k' étant des entiers.

Dans l'équation (10) qui définit la demi-période $\bar{\omega}'$ de l'intégrale

$$\int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$$

doit être exclue une multiple des périodes $2\omega, 2\omega'$; conséquemment pour les nombres entiers k, k' sont possibles seulement les valeurs 0, 1. Donc, nous aurons les cas suivants :

$$(1^{\circ}) \quad \bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n+1}, \quad k = k' = 0.$$

Ce cas se rapporte à la formule (I) et se confond avec l'égalité (8).

$$(2^{\circ}) \quad \bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n+1} + \omega, \quad k = 1, \quad k' = 0.$$

Dans ce cas

$$\bar{\omega}' = \frac{(2n+2)\omega}{2n+1} \equiv \frac{2\omega}{2n+1},$$

ce qui ne peut avoir lieu, car alors

$$\xi'_1 = x_1.$$

$$(3^{\circ}) \quad \bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n+1} + \omega', \quad k = 0, \quad k' = 1.$$

$$(4^{\circ}) \quad \bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n+1} + \omega + \omega', \quad k = 1, \quad k' = 1.$$

Dans ce cas

$$\bar{\omega}' = \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

En posant

$$\bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n+1} + \omega'.$$

nous aurons

$$\bar{\omega} + \bar{\omega}' = \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

Ainsi les trois demi-périodes de l'intégrale

$$\int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

sont parfaitement définies par les formules

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2n+1}, \quad \bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n+1} + \omega', \quad \bar{\omega} + \bar{\omega}' = \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

Maintenant il est évident que nous obtiendrons encore deux formules

$$(II) \quad \bar{p}u - \bar{e}_2 = (pu - e_2) \prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{pu - p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega + \omega'\right)}{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)} \right)^2,$$

$$(III) \quad \bar{p}u - \bar{e}_3 = (pu - e_3) \prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right)}{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)} \right)^2.$$

Des formules (I), (II), (III) nous aurons

$$\bar{p}'u = p'u \prod \frac{\left[pu - p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right) \right] \left[pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right) \right] \left[pu - p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega + \omega'\right) \right]}{\left(pu - p\frac{2k\omega}{2n+1} \right)^3}.$$

5. Des formules précédentes on déduit plusieurs relations dont nous indiquerons la suivante. Nommons

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) &= x^n + ax^{n-1} + \dots, \\ (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n) &= x^n + bx^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Alors

$$\psi x - e_1 = \left(\frac{x^n + bx^{n-1} + \dots}{x^n + ax^{n-1} + \dots} \right)^2 (x - e_1).$$

D'où

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left(\frac{x^n + bx^{n-1} + \dots}{x^n + ax^{n-1} + \dots} \right) \\ &\times \left\{ (x^n + bx^{n-1} + \dots)(x^n + ax^{n-1} + \dots) \right. \\ &+ 2(x - e_1) \left[(x^n + ax^{n-1} + \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}bx^{n-2} + \dots) \right. \\ &\quad \left. \left. - (x^n + bx^{n-1} + \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}ax^{n-2} + \dots) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Comme les racines de l'équation

$$(x^n + bx^{n-1} + \dots)(x^n + ax^{n-1} + \dots) + 2(x - e_1)[(x^n + ax^{n-1} + \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}bx^{n-2} + \dots) - (x^n + bx^{n-1} + \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}ax^{n-2} + \dots)] = 0$$

sont évidemment

$$\begin{matrix} \xi'_1, & \xi'_2, & \dots, & \xi'_n, \\ \xi''_1, & \xi''_2, & \dots, & \xi''_n, \end{matrix}$$

alors

$$\begin{aligned} & \xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_n + \xi''_1 + \xi''_2 + \dots + \xi''_n \\ &= -3a + b = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n); \end{aligned}$$

donc

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \left[p \left(\frac{2k-1}{2n+1} \omega \right) \right] + \sum p \left[\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega' \right] \\ & + \sum \left[p \left(\frac{2k-1}{2n+1} \omega + \omega' \right) \right] = 3 \sum \left[p \left(\frac{2k\omega}{2n+1} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Un cas particulier de cette formule se rencontre dans le Mémoire de Halphen : *Sur la multiplication complexe*, etc. Là se déduit cette formule pour $n = 1$, ce qui correspond à la transformation du troisième degré.

6. En posant

$$\begin{aligned} (x - \xi'_1)(x - \xi'_2) \dots (x - \xi'_n) &= x^n + b'x^{n-1} + \dots \\ (x - \xi''_1)(x - \xi''_2) \dots (x - \xi''_n) &= x^n + b''x^{n-1} + \dots, \end{aligned}$$

et, additionnant les équations (4), (5), (6), nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \bar{p}u = y &= \frac{f(x)}{\varphi(x)} \\ &= \frac{(x^n + bx^{n-1} + \dots)^2(x - e_1) + (x^n + b'x^{n-1} + \dots)^2(x - e_2) + (x^n + b''x^{n-1} + \dots)^2(x - e_3)}{3(x^n + ax^{n-1} + \dots)^2}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \frac{x^{2n+1} + \frac{2}{3}(b + b' + b'')x^{2n} + \dots}{x^{2n} + 2ax^{2n-1} + \dots}, \\ \frac{f(x) - \bar{e}_1 \varphi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{x^{2n+1} + \frac{2}{3}\left(b + b' + b'' - \frac{3}{2}\bar{e}_1\right)x^{2n} + \dots}{x^{2n} + 2ax^{2n-1} + \dots} \\ &= \frac{(x^n + bx^{n-1} + \dots)(x - e_1)}{x^{2n} + 2ax^{2n-1} + \dots}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{x^{2n+1} + \frac{2}{3}\left(b + b' + b'' - \frac{3}{2}\bar{e}_1\right)x^{2n} + \dots}{x^{2n} + 2bx^{2n-1} + \dots} = x - e_1.$$

D'où il suit

$$\frac{2}{3}\left(b + b' + b'' - \frac{3}{2}\bar{e}_1\right) - 2b + e_1 = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} b &= -\sum p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right), \\ b' &= -\sum p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right), \\ b'' &= -\sum p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega + \omega'\right). \end{aligned}$$

D'après l'équation (10), nous aurons

$$\bar{e}_1 = e_1 + 2\sum\left[p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right) - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right].$$

De même nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \bar{e}_2 &= e_2 + 2\sum\left[p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right) - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right], \\ \bar{e}_3 &= e_3 + 2\sum\left[p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega + \omega'\right) - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Un cas particulier de ces formules pour $n=1$ se rencontre chez Halphen.

7. Avant de passer au cas général de transformation du degré pair, arrêtons-nous sur la transformation des deuxième et quatrième degrés, où tous les calculs peuvent être achevés.

Transformation du deuxième degré. — Soumettons l'intégrale

$$\int_{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = u$$

à la transformation d'après la formule

$$\frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + \gamma} = \bar{p}u = y,$$

à la condition que

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}.$$

En faisant maintenant

$$x + \gamma = 0,$$

nous voyons que

$$u = 0$$

et que $(x + \gamma)$ se développe en série avec la partie principale u^{-2} ;
par conséquent

$$x + \gamma = 0$$

est un des points de ramification, soit

$$x + \gamma = x - e_1.$$

Il est évident que nous devons avoir simultanément

$$\bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{x^2 + (x - \bar{e}_1)x + \beta + \bar{e}_1 e_1}{x - e_1} = \frac{(x - e_2)(x - e_3)}{x - e_1},$$

$$\bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{x^2 + (x - \bar{e}_2)x + \beta + e_1 \bar{e}_2}{x - e_1} = \frac{(x - \xi_1)^2}{x - e_1},$$

$$\bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{x^2 + (x - \bar{e}_3)x + \beta + e_1 \bar{e}_3}{x - e_1} = \frac{(x - \xi_2)^2}{x - e_1},$$

De ces équations, nous trouvons

$$\alpha - \bar{e}_1 = e_1, \quad \beta + e_1 \bar{e}_1 = e_2 e_3,$$

$$\alpha^2 - 2\bar{e}_2 \alpha + e_2^2 = 4\beta + 4e_1 \bar{e}_2,$$

$$\alpha^2 - 2\bar{e}_3 \alpha + e_3^2 = 4\beta + 4e_1 \bar{e}_3.$$

D'où

$$\alpha = -e_1, \quad \bar{e}_1 = -2e_1,$$

$$\beta = 2e_1^2 + e_2 e_3 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3),$$

$$\bar{e}_2 = e_1 \pm 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$

$$\bar{e}_3 = e_1 \mp 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$

$$\bar{p}u = \frac{x^2 - e_1 x + 2e_1^2 + e_2 e_3}{x - e_1} = \varphi(x),$$

Comme, d'après ce qui précède, ξ_1, ξ_2 sont les racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

pour les trouver nous avons l'équation

$$\xi^2 - 2e_1\xi - e_1^2 - e_2e_3 = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\xi_1 &= e_1 - \sqrt{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)} = p\left(\frac{\omega}{2}\right), \\ \xi_2 &= e_1 - \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\bar{p}u - e_1 &= \frac{(pu - p\omega')(pu - p\omega + \omega')}{pu - p\omega}, \\ \bar{p}u - e_2 &= \frac{\left(pu - p\frac{\omega}{2}\right)^2}{pu - p\omega}, \\ \bar{p}u - e_3 &= \frac{\left[pu - p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right)\right]^2}{pu - p\omega}.\end{aligned}$$

Ces résultats concordent parfaitement avec la théorie ci-dessus exposée.

8. Transformation du quatrième degré. — Pour la transformation du quatrième degré, nous avons la formule

$$\frac{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^3 + rx^2 + sx + t} = \bar{p}u - \bar{e}_i,$$

$$i = 1, 2, 3,$$

Comme, d'après ce qui précède, le numérateur et le dénominateur de cette fraction peuvent contenir seulement des facteurs simples ou doubles, et comme les facteurs simples doivent être de la forme

$$x - e_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

sont possibles deux transformations du quatrième degré

$$(A) \quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{(x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{(x - x''_1)^2 (x - x''_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}; \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x - x_1)^2 (x - e_2) (x - e_3)}{(x - x_2)^2 (x - e_1)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2}{(x - x_2)^2 (x - e_1)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2}{(x - x_2)^2 (x - e_1)}, \end{cases}$$

Examinons d'abord la transformation (A). Comme pour $x = e_1$ et pour $x = e_3$ nous avons

$$y = \bar{p}u = \infty,$$

l'intégrale

$$\int_{e_1}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \omega'$$

sera une période de l'intégrale

$$\int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2y - \bar{g}_3}},$$

par conséquent

$$\omega' = 2\bar{\omega}', \quad \bar{\omega}' = \frac{\omega'}{2}.$$

Comme ensuite pour $x = \infty$ et $x = e_1$ nous avons

$$y = \bar{p}u = \infty,$$

l'intégrale

$$\int_{\infty}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} =$$

sera une période de l'intégrale

$$\int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2y - \bar{g}_3}};$$

par conséquent

$$\omega = 2\bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{2}.$$

Il est facile de voir que

$$\int_{\infty}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\infty}^{\bar{e}_1} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2y - \bar{g}_3}} = \bar{\omega} = \frac{\omega}{2},$$

donc

$$x_1 = p\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Comme l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \varphi$$

est égale à la période de l'intégrale

$$\int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}},$$

on aura

$$\varphi = 2\bar{\omega} \quad \text{ou} \quad \varphi = 2\bar{\omega}'.$$

Si l'on prend

$$\varphi = 2\bar{\omega},$$

on aura

$$x_2 = p\left(\frac{\omega}{2} + \omega\right) = p\left(\frac{\omega}{2}\right) = x_1,$$

ce qui ne peut avoir lieu ; donc

$$x_2 = p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right).$$

Par cette raison

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{\left(x - p\frac{\omega}{2}\right)^2 \left[x - p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right)\right]^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x^2 - 2e_1x - e_1^2 - e_2e_3)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}. \end{cases}$$

Comme

$$\int_{\infty}^{x'_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\infty}^{\bar{e}_2} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} = \bar{\omega}' = \frac{\omega'}{2},$$

nous avons

$$x'_1 = p\frac{\omega'}{2}, \quad x'_2 = p\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right),$$

donc

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{\left[x - p\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right]^2 \left[x - p\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right)\right]^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{(x^2 - 2e_3x - e_3^2 - e_1e_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}. \end{cases}$$

Comme

$$\int_{\infty}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\infty}^{\bar{e}_2} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2y - \bar{g}_3}} = \bar{\omega} + \bar{\omega}' = \frac{\omega + \omega'}{2},$$

on aura

$$x_1'' = p\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right), \quad x_2'' = p\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right),$$

donc

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{\left[x - p\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)\right]^2 \left[x - p\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right)\right]^2}{(x - e_1)(x - e_3)(x - e_2)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{(x^2 - 2e_2x - e_2^2 - e_1e_3)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}. \end{cases}$$

Des équations (11), (12), (13) nous déduirons

$$3\bar{p}u = \frac{3x^4 + \frac{3}{2}g_2x^2 + 6g_3x + \frac{3}{16}g_2^2}{x^3 - \frac{1}{4}g_2x - \frac{1}{4}g_3}$$

d'où

$$\bar{p}u = 4p(2u).$$

Si l'on prend ici

$$u = \frac{\omega}{2},$$

nous obtiendrons

$$\bar{e}_1 = 4e_1.$$

En posant successivement

$$u = \frac{\omega'}{2}, \quad u = \frac{\omega + \omega'}{2},$$

nous aurons

$$\bar{e}_2 = 4e_2, \quad \bar{e}_3 = 4e_3,$$

donc

$$\begin{aligned} \bar{g}_2 &= 4^2g_2, & \bar{g}_3 &= 4^3g_3, \\ p\left(\frac{u}{\frac{1}{2}}, g_2, g_3\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 p(u, 4^2g_2, 4^3g_3). \end{aligned}$$

Cette formule s'obtient de la formule d'homogénéité

$$p\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}, \mu^2\bar{g}_2, \mu^3\bar{g}_3\right) = \mu p(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3),$$

en posant

$$\sqrt{\mu} = \frac{1}{2}.$$

Tel est le caractère de la transformation du quatrième degré que nous venons d'examiner.

La transformation du quatrième degré (B), étant un cas particulier de la transformation générale du degré pair $2n$, il est inutile de l'examiner spécialement.

9. *A priori* sont possibles deux transformations du degré pair $2n$. La première transformation se définit par les formules

$$(14) \quad \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)},$$

$$(15) \quad \bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)},$$

$$(16) \quad \bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{(x - \xi''_1)^2 (x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_{n-1})^2 (x - e_2) (x - e_3)}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)}.$$

La seconde transformation se définit par les formules

$$\bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1) (x - e_2) (x - e_3)},$$

$$\bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1) (x - e_2) (x - e_3)},$$

$$\bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{(x - \xi''_1)^2 (x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1) (x - e_2) (x - e_3)}.$$

Arrêtons-nous à la première transformation. Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= p\alpha_1, & x_2 &= p\alpha_2, & \dots, & x_{n-1} &= p\alpha_{n-1}, \\ \xi_1 &= p\beta_1, & \xi_2 &= p\beta_2, & \dots, & \xi_n &= p\beta_n. \end{aligned}$$

Pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{p}u = \infty,$$

par conséquent les arguments

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \omega$$

sont les périodes de l'intégrale

$$\int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}};$$

c'est pourquoi tous sont compris dans la formule $2k\bar{\omega}$. En posant

$$\omega = 2r\bar{\omega},$$

nous aurons

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2r},$$

r étant un entier.

Pour

$$x = \xi_1, \quad x = \xi_2, \quad \dots, \quad x = \xi_n,$$

nous avons

$$y = \bar{p}u = \bar{e}_1;$$

donc les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots, \quad \beta_n$$

sont tous compris dans la formule

$$(2k+1)\bar{\omega} = \frac{(2k+1)\omega}{2r},$$

donc

$$\alpha_k = \frac{2k\omega}{2r}, \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\omega}{2r},$$

où, évidemment, on peut prendre

$$\alpha_k, \quad \beta_k,$$

dans les limites 0 et ω

Comme les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1}, \quad \omega, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots, \quad \beta_n$$

sont tous différents, conformément au n° 3, il est nécessaire.

$$\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n}, \quad \alpha_2 = \frac{4\omega}{2n}, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} = \frac{2(n-1)\omega}{2n},$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{2n}, \quad \beta_2 = \frac{3\omega}{2n}, \quad \dots, \quad \beta_n = \frac{2n-1}{2n}\omega,$$

et nous soutiendrons

$$(IV) \quad \bar{p}u - \bar{e}_1 = (pu - e_1) \prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{pu - p\left(\frac{2k-1}{2n}\omega\right)}{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n}\right)} \right)^2.$$

10. La formule (16) montre que, pour $x = \infty$, nous avons

$$y = \bar{p}u = \infty,$$

et pour

$$x = \xi'_1, \quad x = \xi'_2, \quad \dots, \quad x = \xi'_n$$

nous aurons

$$y = \bar{p}u = \bar{e}_2.$$

Si l'on change x de $x = \infty$ à $x = \xi_1$, ensuite de $x = \xi_1$ à $x = x_1$, alors y passe deux fois par l'infini.

D'où il suit que l'argument α_1 satisfaisant à l'équation

$$X_1 = p(\alpha_1),$$

doit être défini par la formule

$$\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n} + 2k\omega + 2k'\omega' = 2\bar{\omega}',$$

d'où

$$\bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n} + k\omega + k'\omega',$$

où pour les nombres entiers k, k' sont possibles seulement les valeurs 0 et 1.

Pour $k = k' = 0$, nous aurons

$$\bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n}.$$

Ce cas se rapporte à la formule (IV).

Pour $k = 1, k' = 0$, nous obtiendrons

$$\bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n} + \omega = \frac{(2n-1)\omega}{2n}.$$

Ce cas se rapporte à la formule (IV).

Pour $k = 0, k' = 1$, nous avons

$$\bar{\omega}' = \frac{\omega}{2n} + \omega'.$$

Nous avons évidemment les trois demi-périodes suivantes

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2n}, \quad \omega' = \frac{\omega}{2n} + \omega', \quad \bar{\omega}' + \bar{\omega} = \frac{\omega}{n} + \omega'.$$

Par conséquent

$$\bar{p}u - \bar{e}_2 = (pu - e_1) \prod_1^n \left(\frac{pu - p\left(\frac{2k-1}{2n}\omega + \omega'\right)}{pu - p\frac{2k\omega}{2n}} \right)^2,$$

$$pu - e_3 = \frac{(pu - e_1)(pu - e_2)}{pu - e_3} \prod_1^n \left(\frac{pu - p\left(\frac{k\omega}{n} + \omega'\right)}{pu - p\left(\frac{k\omega}{n}\right)} \right)^2.$$

11. Sans nous arrêter davantage sur la transformations de la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = y,$$

où le degré du numérateur surpasse d'une unité le degré du dénominateur, je veux montrer qu'on peut avoir les formules de transformation aussi pour le cas où le degré du numérateur égale celui du dénominateur.

Qu'il s'agisse de satisfaire à l'équation

$$(17) \quad \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\bar{e}_1}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2y - \bar{g}_3}} = u$$

par la substitution

$$(18) \quad \frac{f_{\alpha}(x)}{\varphi_{\beta}(x)} = \bar{p}u - \bar{e}_1.$$

De l'équation (17) on voit que, pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{p}u = \bar{e}_1$$

L'équation (18) donne, pour $x = \infty$, un développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{\alpha-\beta}}$$

d'où il suit que

$$\beta - \alpha = 1.$$

Posant

$$\beta = 2n + 1, \quad \alpha = 2n,$$

et en raisonnant, d'après ce qui précède, nous aurons les trois formules suivantes

$$(19) \quad \bar{p}u - e_1 = \frac{(x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2}{(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2(x - e_1)},$$

$$(20) \quad \bar{p}u - \bar{e}_2 = a \frac{(x - \xi'_1)^2(x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2(x - e_2)}{(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2(x - e_1)},$$

$$(21) \quad \bar{p}u - e_3 = b \frac{(x - \xi''_1)^2(x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_n)^2(x - e_3)}{(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2(x - e_1)},$$

où

$$a = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad b = \bar{e}_1 - \bar{e}_3.$$

Nommons maintenant

$$\begin{aligned} x_1 &= p\alpha_1, & x_2 &= p\alpha_2, & \dots, & x_n &= p\alpha_n, \\ \xi_1 &= p\beta_1, & \xi_2 &= p\beta_2, & \dots, & \xi_n &= p\beta_n, \\ \xi'_1 &= p\beta'_1, & \xi'_2 &= p\beta'_2, & \dots, & \xi'_n &= p\beta'_n, \\ \xi''_1 &= p\beta''_1, & \xi''_2 &= p\beta''_2, & \dots, & \xi''_n &= p\beta''_n. \end{aligned}$$

L'équation (19) montre que pour

$$x = \infty, \quad x = \xi_1, \quad x = \xi_2, \quad \dots, \quad x = \xi_n,$$

nous obtiendrons

$$y = \bar{p}u = e_1;$$

par conséquent les arguments

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

sont tous compris dans la formule

$$\beta_k = 2k\bar{\omega}.$$

Posant

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad \dots, \quad x = x_n, \quad x = e_1,$$

nous aurons

$$y = \bar{p}u = \infty.$$

D'où, d'après l'équation (17), nous concluons que les arguments

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \omega$$

sont composés d'un nombre impair de demi-périodes $\bar{\omega}$, donc

$$\alpha_k = (2k + 1)\bar{\omega}; \quad \omega = (2r + 1)\bar{\omega},$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2r + 1}.$$

Et comme les arguments

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n; \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \omega$$

sont tous différents, conformément au n° 3, il est nécessaire

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{2n + 1}, \quad \alpha_2 = \frac{3\omega}{2n + 1}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{(2n - 1)\omega}{2n + 1},$$

$$\beta_1 = \frac{2\omega}{2n + 1}, \quad \beta_2 = \frac{4\omega}{2n + 1}, \quad \dots, \quad \beta_n = \frac{2n\omega}{2n + 1}.$$

Et nous obtiendrons

$$(VII) \quad \bar{p}u - e_1 = \frac{1}{pu - e_1} \prod \left(\frac{pu - p \frac{2k\omega}{2n+1}}{pu - p \frac{2k-1}{2n+1} \omega} \right)^2.$$

L'équation (20) montre que les arguments

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

doivent être déterminés par l'équation

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} = \frac{2\omega}{2n+1} + 2k\omega + 2k'\omega' = 2\bar{\omega};$$

d'où

$$\omega' = \frac{\omega}{2n+1} + k\omega + k'\omega',$$

où k, k' ont deux valeurs, 0 et 1. Posant

$$k = 1, \quad k' = 0,$$

nous avons

$$\omega' \equiv \frac{2n\omega}{2n+1},$$

ce qui se confond avec le cas précédent. Nous avons seulement deux cas nouveaux

$$\bar{\omega}'_1 = \frac{\omega}{2n+1} + \omega',$$

$$\bar{\omega}'_2 = \frac{\omega}{2n+1} + \omega + \omega',$$

c'est-à-dire on peut prendre

$$\bar{\omega}'_2 = \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

Ayant en vue que

$$\bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}'_1 + \bar{\omega},$$

nous concluons que les demi-périodes de l'intégrale

$$\int_{e_1}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$$

seront

$$\frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega}{2n+1} + \omega', \quad \frac{\omega}{2n+1} + \omega',$$

Par conséquent

$$\bar{p}u - \bar{e}_2 = (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \frac{pu - e_2}{pu - e_1} \prod_1^n \left(\frac{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right)}{pu - p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right)} \right)^2.$$

$$\bar{p}u - \bar{e}_3 = (\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \frac{pu - e_3}{pu - e_1} \prod_1^n \left(\frac{pu - p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega + \omega'\right)}{pu - p\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right)} \right)^2.$$

RECHERCHE ANALYTIQUE SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DE SECONDE ESPÈCE

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXVIII, 1904, pp. 47-63 et 74-85)

I

1. La réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques de seconde espèce se fait suivant la méthode que nous avons développée pour les intégrales de première espèce ⁽¹⁾. Quoique ce nouveau problème soit un peu plus compliqué, néanmoins, dans tous les cas où la réduction peut être effectuée à l'aide de simples opérations algébriques, ces dernières ne présentent aucune difficulté. Pour les intégrales hyperelliptiques, la théorie se présente sous la forme plus ou moins définitive.

Soit donnée l'intégrale hyperelliptique de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$R(x)$ étant un polynôme du degré n . Il faut choisir la fonction rationnelle $F(x)$ du degré k de telle sorte que

$$(1) \quad \int \frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = A\zeta(u, g_2, g_3).$$

La réduction doit être effectuée à l'aide de la substitution

$$(2) \quad \varphi(x) = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle. Nous étudierons d'abord le cas, où $\varphi(x)$ est une fonction entière du degré i . Soit k le degré de

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XXVII, juin 1903.

la fonction rationnelle $F(x)$. En posant $x = \infty$ dans l'équation (2), nous aurons un développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{i}}.$$

Faisant $x = \infty$ dans l'équation (1), nous obtiendrons un développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{2k-n+2}};$$

donc

$$(3) \quad i = 2k - n + 2.$$

De l'équation (2) nous aurons un développement

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x_0) + \dots \\ = \lambda \left(p(u_0) + (u - u_0)p'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{1 \cdot 2} p''(u_0) + \dots \right), \end{aligned}$$

où x_0 est l'une des racines de l'équation

$$\varphi(x) - p(u_0) = 0.$$

Nous considérons le cas particulier, lorsque

$$\varphi'(x_0) = 0, \quad \varphi''(x_0) \neq 0;$$

c'est-à-dire lorsque $x = x_0$ est une racine double de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda p(u_0) = 0.$$

Dans ce cas, deux hypothèses sont possibles :

$$\begin{array}{ll} 1^0 & p'(u_0) = 0; \\ 2^0 & p'(u_0) \neq 0. \end{array}$$

Si $p'(u_0) = 0$, l'argument u_0 est une demi-période de l'intégrale elliptique, et

$$p(u_0) = e_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

x_0 est une racine double de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_i = 0,$$

et, au voisinage du point $x - x_0 = 0$, x est une fonction holomorphe de l'argument u . Dans le cas où $p'(u_0) \neq 0$, $x - x_0$ se développe en série avec la partie principale

$$(u - u_0)^{\frac{1}{2}}.$$

De ce qui précède nous concluons que les racines

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{i-1}$$

de l'équation $\varphi'(x) = 0$ se partagent en deux groupes :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \\ 2^\circ & \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_h; \end{array}$$

toutes les racines du premier groupe satisfont à l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dans tous les points

$$\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_h,$$

x est une fonction non holomorphe de l'argument u

$$(4) \quad \begin{cases} j + h = i - 1, \\ j = i - h - 1. \end{cases}$$

Le produit

$$[\varphi(x) - \lambda e_1][\varphi(x) - \lambda e_2][\varphi(x) - \lambda e_3]$$

est divisible par $R(x)$. En effet, désignant par z l'une des racines de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_i = 0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} & \varphi(z) + (x - z)\varphi'(z) + \frac{(x - z)^2}{1 \cdot 2} \varphi''(z) + \dots \\ &= \lambda \left(p(\omega_i) + \frac{(u - \omega_i)^2}{1 \cdot 2} p''(\omega_i) + \dots \right). \end{aligned}$$

Si nous avons

$$\varphi'(z) \neq 0,$$

$x - z = 0$ est un point de ramification, et comme

$$\varphi(z) = \lambda p(\omega_i),$$

$x - z$ est un diviseur du polynôme

$$\varphi(x) - \lambda e_i;$$

si nous avons

$$\varphi'(z) = 0,$$

alors $x = z$ est une racine double du polynôme

$$\varphi(x) - \lambda e_i.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & [\varphi(x) - \lambda e_1] [\varphi(x) - \lambda e_2] [\varphi(x) - \lambda e_3] \\ & = R(x)(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_j)^2; \end{aligned}$$

donc

$$3i = n + 2(i - h - 1),$$

d'où

$$(5) \quad i = n - 2h - 2.$$

Des équations (3) et (5) nous trouvons

$$(6) \quad k = n - h - 2.$$

En posant successivement

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

nous aurons un nombre infini d'intégrales de seconde espèce réductibles aux intégrales elliptiques.

2. Nous obtiendrons, évidemment, le cas le plus simple pour $h = 0$; alors

$$i = n - 2, \quad k = n - 2.$$

Prenons $n = 7$,

$$R(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d).$$

Il faut choisir

$$\alpha, \beta, a, b, c, d, F(x),$$

de telle sorte que

$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d)}} = A\zeta(u, g_2, g_3).$$

Posons

$$\varphi(x) = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme du cinquième degré. Comme

$$[\varphi(x) - \lambda e_1] [\varphi(x) - \lambda e_2] [\varphi(x) - \lambda e_3]$$

est divisible par $R(x)$, nous aurons les deux combinaisons possibles

$$(I) \quad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda e_1 = (x - x_1) \dots (x - x_5), \\ \varphi(x) - \lambda e_2 = (x - x_6)(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2, \\ \varphi(x) - \lambda e_3 = (x - x_7)(x - \xi_3)^2 (x - \xi_4)^2, \end{cases}$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$

étant les racines du polynôme $\varphi'(x)$;

$$(II) \quad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda e_1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - \xi_1)^2, \\ \varphi(x) - \lambda e_2 = (x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)(x - \xi_2)^2, \\ \varphi(x) - \lambda e_3 = (x - x_7)(x - \xi_3)(x - \xi_4)^2. \end{cases}$$

Étudions la première combinaison. Posons

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d,$$

d'où

$$\varphi'(x) = 5(x^4 + 3ax^2 + 2bx + c).$$

Le produit

$$(\varphi x - \lambda e_2)(\varphi x - \lambda e_3) = \varphi^2(x) + \lambda e_1 \varphi(x) + \lambda^2 e_2 e_3$$

est divisible par

$$[\varphi'(x)]^2.$$

De cette condition nous trouverons

$$b = 0, \quad c = a^2,$$

$$\lambda e_1 = -\frac{2}{3}d, \quad \lambda^2 e_2 e_3 = 4a^3 + \frac{1}{9}d^2,$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + 4a.$$

Des équations

$$\lambda e_1 = -\lambda(e_2 + e_3) = -\frac{2}{3}d, \quad \lambda^2 e_2 e_3 = 4a^3 + \frac{1}{9}d^2$$

nous obtiendrons

$$\lambda e_2 = \frac{1}{3}d + 2a^2\sqrt{-a}, \quad \lambda e_3 = \frac{1}{3}d - 2a^2\sqrt{-a};$$

donc

$$\lambda^3 g_2 = 4\left(\frac{1}{3}d^2 - 4a^5\right),$$

$$\lambda^3 g_3 = -\frac{8}{3}\left(\frac{d^3}{9} - 4a^5d\right);$$

$$(7) \quad \varphi(x) = x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + \frac{1}{3}d = \lambda p(u, g_2, g_3).$$

Posons maintenant

$$F(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)};$$

désignons par

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \dots$$

les racines du polynôme $f(x)$. L'équation (1) nous montre qu'au voisinage du point η_m nous aurons un développement de la forme

$$(8) \quad a + b(x - \eta_m)^2 + \dots = \zeta(\varphi) - (u - \varphi)p(\varphi) + \frac{(u - \varphi)^2}{1 \cdot 2} p'(\varphi) + \dots$$

D'après les hypothèses faites, x est une fonction holomorphe de l'argument u pour toutes les valeurs finies de x , comme le montre l'équation (7); donc

$$p(\varphi) = 0.$$

D'où il suit que

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \dots$$

sont les racines de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda p(u) = 0;$$

par conséquent

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Et comme le degré de la fonction $F(x)$

$$k = n - 2 = i = 5,$$

la fonction $\psi(x)$ doit être une constante; donc

$$F(x) = \varphi(x),$$

et nous aurons définitivement

$$\int \frac{(x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + \frac{1}{3}d)dx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + d)}} = \frac{4}{25} \zeta(u, g_2, g_3),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + d)}} = u.$$

3. En posant $h = 1$ dans les formules (5) et (6), nous avons

$$i = n - 4, \quad k = n - 3.$$

Il y a une infinité d'intégrales réductibles de cette catégorie. Posons $n = 7$, alors

$$i = 3, \quad k = 4.$$

Désignant par

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_7$$

les racines du polynôme $R(x)$, nous avons une seule combinaison possible

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \lambda e_1 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \\ \varphi(x) - \lambda e_2 &= (x - x_4)(x - x_5)(x - x_6), \\ \varphi(x) - \lambda e_3 &= (x - x_7)(x - \xi)^2,\end{aligned}$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme du troisième degré, ξ est l'une des racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 3(x - \xi)(x - \eta) = 0.$$

Supposons

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = x^3 - 3a^2x + b;$$

alors

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \lambda e_2 &= x^3 - 3a^2x + b + \lambda(e_1 - e_2), \\ \varphi(x) - \lambda e_3 &= x^3 - 3a^2x + b + \lambda(e_1 - e_3), \\ \varphi'(x) &= 3(x^2 - a^2), \\ \xi &= a, \quad \eta = -a.\end{aligned}$$

Et, comme

$$\varphi(x) - \lambda e_3$$

est divisible par

$$(x - a)^2,$$

nous aurons

$$x - x_7 = x + 2a, \quad b + \lambda(e_1 - e_3) = 2a^3.$$

Maintenant, en posant

$$R(x) = (x^3 - 3a^2x + b)(x^3 - 3a^2x + c)(x + 2a),$$

nous avons

$$b + \lambda(e_1 - e_2) = c.$$

Par conséquent

$$\lambda e_1 = \frac{1}{3}(2a^3 - 2b + c);$$

$$\lambda e_2 = \frac{1}{3}(2a^3 + b + 2c);$$

$$\lambda e_3 = \frac{1}{3}(b + c - 4a^3);$$

$$\lambda^2 g_2 = \frac{4}{3}(b^2 + c^2 - bc + 4a^6 + 2a^3b - 2a^3c);$$

$$\begin{aligned}\lambda^3 g_3 &= \frac{4}{27}(12a^6b + 12a^6c - 16a^9 - 24a^3bc + 6a^3b^2 + 6a^3c^2 \\ &\quad + 3bc^2 + 3b^2c - 2b^3 - 2c^3).\end{aligned}$$

Comme

$$k = n - 3 = 4,$$

$F(x)$ est une fonction rationnelle du quatrième degré. Soit

$$F(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)};$$

alors les zéros de la fonction $F(x)$ sont les racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Aux environs de chacune de ces racines

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \dots,$$

nous aurons un développement de la forme

$$a + b(x - \eta)^2 + \dots = \zeta(v) - p(v)(u - v) + \frac{1}{2} p'(v)(u - v)^2 + \dots$$

Si nous avons

$$p(v) = 0,$$

$(x - \eta)$ est une fonction holomorphe de $(u - v)$. Si au contraire

$$p(v) \neq 0,$$

la partie principale du développement de $(x - \eta)$ sera

$$(u - v)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda p(u)$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi'(x_0) \\ + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \varphi''(x_0) + \dots = \lambda [p(u_0) + (u - u_0) p'(u_0) + \dots]. \end{aligned}$$

Si nous avons

$$\varphi'(x_0) \neq 0, \quad p'(u_0) = 0,$$

alors $x - x_0 = 0$ est un point de ramification. Quand

$$\varphi'(x_0) = 0, \quad p'(u_0) = 0,$$

alors $(x - x_0)$ est une fonction holomorphe de l'argument $(u - u_0)$.

Il y a une seule valeur $x - x_0 = 0$ pour laquelle nous ayons simultanément

$$\varphi'(x_0) = 0, \quad p'(u_0) \neq 0;$$

cette valeur est

$$x + a = 0.$$

Aux environs de ce point nous avons un développement de $(x + a)$ avec la partie principale

$$(u - u_0)^{\frac{1}{2}}.$$

De cette analyse il résulte que

$$\tau_{11}, \quad \tau_{12}, \quad \tau_{13}$$

sont les racines de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda p(u) = 0,$$

et

$$\tau_{14} = -a;$$

donc

$$f(x) = \varphi(x) (x + a) = (x^3 - 3a^2x + \frac{1}{3}(b + c + 2a^3)) (x + a);$$

$$\psi(x) = 1;$$

$$F(x) = (x^3 - 3a^2x + \frac{1}{3}(b + c + 2a^3)) (x + a).$$

Par conséquent, l'intégrale réductible sera

$$\int \frac{(x^3 - 3a^2x + \frac{1}{3}(b + c + 2a^3)) (x + a) dx}{\sqrt{(x^3 - 3a^2x + b)(x^3 - 3a^2x + c)(x + 2a)}} = \frac{2}{3} \lambda^{\frac{1}{2}} \zeta(u, g_2, g_3).$$

Pour déterminer le facteur numérique λ , remarquons que

$$u = \int \frac{(x + a) dx}{\sqrt{(x^3 - 3a^2x + b)(x^3 - 3a^2x + c)(x + 2a)}}.$$

De cette équation, d'après la formule

$$\varphi(x) = \lambda p(u),$$

nous trouvons

$$\lambda = \frac{4}{9}.$$

4. Comme troisième exemple prenons $h = 2$, alors

$$i = n - 6, \quad k = n - 4.$$

Soit $n = 10$, alors

$$i = 4, \quad k = 6.$$

Nommant

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{10}$$

les racines du polynôme $R(x)$, nous avons une seule combinaison possible

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

$$\varphi(x) - \lambda e_2 = (x - x_5)(x - x_6)(x - x_7)(x - x_8),$$

$$\varphi(x) - \lambda e_3 = (x - x_9)(x - x_{10})(x - \xi)^2;$$

ξ étant une racine de l'équation

$$\varphi'(x) = 0.$$

Posons

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = x^4 + 2ax^2 + 4bx + c;$$

alors

$$\varphi(x) - \lambda e_2 = x^4 + 2ax^2 + 4bx + c + \lambda(e_1 - e_2),$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda e_3 &= x^4 + 2ax^2 + 4bx + c + \lambda(e_1 - e_3) \\ &= (x^2 + 2\alpha x + \beta)(x - \xi)^2, \end{aligned}$$

$$R(x) = (x^4 + 2ax^2 + 4bx + c)(x^4 + 2ax^2 + 4bx + d)(x^2 + 2\alpha x + \beta),$$

où

$$d = c + \lambda(e_1 - e_2),$$

$$\xi^3 + a\xi + b = 0.$$

De la condition

$$\varphi(x) - \lambda e_3 = (x^2 + 2\alpha x + \beta)(x - \xi)^2$$

nous aurons

$$1^\circ \quad \alpha^3 + a\alpha + b = 0,$$

c'est-à-dire que l'on peut prendre

$$\alpha = \xi;$$

$$2^\circ \quad \beta = 2a + 3\xi^2 = 2a + 3\xi^2,$$

$$3^\circ \quad c + \lambda(e_1 - e_3) = 2a\beta + 4\xi^2\beta - \beta^2 = 3\xi^4 + 2a\xi^2;$$

d'où

$$\lambda(e_1 - e_3) = 3\xi^4 + 2a\xi^2 - c.$$

Nous avons encore

$$\lambda(e_1 - e_2) = d - c.$$

Par conséquent

$$\lambda e_1 = \frac{1}{3} (3\xi^4 + 2a\xi^2 - 2c + d),$$

$$\lambda e_2 = \frac{1}{3} (3\xi^4 + 2a\xi^2 + c - 2d),$$

$$\lambda e_3 = \frac{1}{3} (c + d - 6\xi^4 - 4a\xi^2).$$

C'est pourquoi

$$R(x) = (x^4 + 2ax^2 + 4bx + c) \\ \times (x^4 + 2ax^2 + 4bx + d) (x^2 + 2\xi x + 3\xi^2 + 2a),$$

$$\varphi(x) = x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3} (3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d) = \lambda p(u).$$

Il est facile de prouver que $\mathcal{F}(x)$ est une fonction entière renfermant des facteurs linéaires $(x - x_j)$ de deux catégories

1° Tels que, pour $x = x_j$, on aura

$$p(u_j) = 0;$$

2° Les facteurs pour lesquels nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale

$$(u - u_j)^{\frac{1}{2}}.$$

Les facteurs de la seconde catégorie se détermineront par l'équation

$$\frac{\varphi'(x)}{x - \xi} = 0,$$

ou

$$x^2 + \xi x + \xi^2 + a = 0.$$

Par conséquent

$$F(x) = (x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3} (3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d)) (x^2 + \xi x + \xi^2 + a).$$

Par conséquent

$$\int \frac{(x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3} (3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d)) (x^2 + \xi x + \xi^2 + a) dx}{\sqrt{(x^4 + 2ax^2 + 4bx + c) (x^4 + 2ax^2 + 4bx + d) (x^2 + 2\xi x + 3\xi^2 + 2a)}} \\ = \frac{1}{4} \zeta(u, g_2, g_3),$$

où ξ satisfait à l'équation

$$\xi^3 + a\xi + b = 0.$$

La réduction se fait par la substitution

$$x^4 + 2ax^2 + 4bx + \frac{1}{3}(3\xi^4 + 2a\xi^2 + c + d) = \frac{1}{4}p(u, g_2, g_3),$$

$$u = \int \frac{(x^2 + \xi x + \xi^2 + a)dx}{\sqrt{(x^4 + 2ax^2 + 4bx + c)(x^4 + 2ax^2 + 4bx + d)(x^2 + 2\xi x + 3\xi^2 + 2a)}}.$$

5. Considérons maintenant les cas de réductibilité où $\varphi(x)$ est une fraction rationnelle. Posons

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

$f(x)$ étant un polynôme du degré i , $\psi(x)$ un polynôme du degré $(i - j)$. Considérons le cas, particulièrement simple, où toutes les racines du polynôme $\psi(x)$ sont des points de ramification; dans ce cas, $\psi(x)$ est un diviseur de $R(x)$. Il est clair que le produit

$$(9) \quad [f(x) - \lambda e_1 \psi(x)][f(x) - \lambda e_2 \psi(x)][f(x) - \lambda e_3 \psi(x)]$$

est divisible par

$$\frac{R(x)}{\psi(x)},$$

et le quotient doit être de la forme

$$(x - x_\alpha)^\alpha (x - x_\beta)^\beta \dots,$$

$\alpha, \beta, \dots$ étant des entiers positifs. Posons pour simplifier

$$\alpha = \beta = \dots = 2.$$

Dans ce cas le produit (9) renferme des facteurs de deux catégories :

1° Facteurs simples qui sont, en même temps, les facteurs du polynôme $R(x)$ (de degré n);

2° Facteurs doubles qui sont, en même temps, les facteurs simples du polynôme

$$f'(x)\psi(x) - \psi'(x)f(x),$$

de degré

$$2i - j - 1.$$

Supposons que

$$[f(x) - \lambda e_1 \psi(x)][f(x) - \lambda e_2 \psi(x)][f(x) - \lambda e_3 \psi(x)]$$

$$= \frac{R(x)}{\psi(x)} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{2i-j-1})^2;$$

alors

$$3i = n - i + j + 2(2i - j - h - 1);$$

d'où

$$n = j + 2h + 2,$$

$$2i - j - 1 \geq h.$$

Et comme

$$n \geq 5, \quad j \geq 1,$$

nous avons évidemment

$$h > 0.$$

Prenons comme exemple $h = 3, j = 1$, alors

$$n = 9, \quad 2i \geq 5;$$

posons

$$i = 3.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle manière que

$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = A\zeta(u, g_2, g_3).$$

Supposons que la réduction s'effectuera par la substitution

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + ax + b} = \lambda p(u, g_2, g_3).$$

Posons

$$R(x) = (x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1) \\ \times (x^3 + a_2x^2 + b_2x + c_2)(x^2 + ax + b)(x - r),$$

et désignons, pour abréger,

$$x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1 = f_1(x),$$

$$x^3 + a_2x^2 + b_2x + c_2 = f_2(x),$$

$$x^2 + ax + b = \theta(x)$$

$$\lambda e_1 = e'_1, \quad \lambda e_2 = e'_2, \quad \lambda e_3 = e'_3,$$

Nous avons évidemment

$$(10) \quad \begin{cases} x^3 + (x - e'_1)x^2 + (\beta - ae'_1)x + \gamma - be'_1 = x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1, \\ x^3 + (x - e'_2)x^2 + (\beta - ae'_2)x + \gamma - be'_2 = x^3 + a_2x^2 + b_2x + c_2, \\ x^3 + (x - e'_3)x^2 + (\beta - ae'_3)x + \gamma - be'_3 = (x - r)(x - \xi)^2; \end{cases}$$

ξ est l'une des racines de l'équation

$$f'(x)\psi(x) - \psi'(x)f(x) = 0.$$

Des équations (10) nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha - e'_1 &= a_1, & \beta - ae'_1 &= b_1, & \gamma - be'_1 &= c_1. \\ \alpha - e'_2 &= a_2, & \beta - ae'_2 &= b_2, & \gamma - be'_2 &= c_2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$a = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, \quad b = \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}.$$

En outre

$$\begin{aligned} r^3 - (\alpha - e'_3)r^2 + (\beta - ae'_3)r + \gamma - be'_3 &= 0, \\ 2\alpha + e'_3 &= a_1 + a_2, \quad 2\beta + ae'_3 = b_1 + b_2, \quad 2\gamma + be'_3 = c_1 + c_2, \\ 2(\alpha - e'_3) &= a_1 + a_2 - 3e'_3, \\ 2(\beta - ae'_3) &= b_1 + b_2 - 3ae'_3, \\ 2(\gamma - be'_3) &= c_1 + c_2 - 3be'_3, \\ 2r^3 + (a_1 + a_2 - 3e'_3)r^2 + (b_1 + b_2 - 3ae'_3)r + c_1 + c_2 - 3be'_3 &= 0; \\ \text{d'où} \end{aligned}$$

$$e'_3 = \frac{f_1(r) + f_2(r)}{3\theta(r)}.$$

Par cette raison

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3(a_1 + a_2)\theta(r) - [f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)}, \\ \beta &= \frac{3(b_1 + b_2)\theta(r) - a[f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)}, \\ \gamma &= \frac{3(c_1 + c_2)\theta(r) - b[f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)}, \\ e'_1 &= \frac{3(a_2 - a_1)\theta(r) - [f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)}, \\ e'_2 &= \frac{3(a_1 - a_2)\theta(r) - [f_1(r) + f_2(r)]}{6\theta(r)}, \\ e'_3 &= \frac{f_1(r) + f_2(r)}{3\theta(r)}. \end{aligned}$$

Déterminons maintenant la fonction $F(x)$. De l'équation

$$(11) \quad \int \frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = A\zeta(u, g_2, g_3)$$

nous avons pour $x = \infty$ un développement avec la partie principale

$$(u)^{-\frac{2}{2k-1}},$$

k désignant le degré de la fonction $F(x)$. Par conséquent

$$-\frac{2}{2k-7} = -2, \\ k = 4.$$

L'équation

$$(12) \quad \frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + ax + b} = \lambda p(u, g_2, g_3)$$

nous montre que x ne sera pas une fonction holomorphe de l'argument u au voisinage des points satisfaisant à l'équation

$$f'(x)\psi(x) - \psi'(x)f(x) = 0$$

et à la condition

$$p'(u) \neq 0.$$

Il y a seulement trois points de cette catégorie; ce sont les racines de l'équation

$$(13) \quad \frac{f'(x)\psi(x) - \psi'(x)f(x)}{x - \xi} = 0.$$

Il s'ensuit que la fonction rationnelle $F(x)$ doit être choisie de telle manière que x soit une fonction holomorphe de l'argument u dans toute l'étendue du plan à l'exception des trois points (13) aux environs desquels nous avons les développements de la forme

$$x - \xi' = A(u - u')^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Par conséquent, en posant

$$F(x) = \frac{F_1(x)}{F_2(x)},$$

nous voyons que $F_1(x)$ doit être divisible par le polynôme (13).

En outre $F_1(x)$ peut renfermer seulement les facteurs pour lesquels

$$p'(u) = 0.$$

Ces facteurs sont déterminés par l'équation

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = f(x) = 0.$$

Par cette raison

$$F_1(x) = \frac{[f'(x)\psi(x) - \psi'(x)f(x)](x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{x - \xi};$$

cette fonction est du sixième degré. La fonction $F_2(x)$ du deuxième degré ne peut avoir d'autres racines que les points de ramification; car, autrement, l'intégrale (I) aurait les points critiques logarithmiques, ce qui est impossible. Il est facile de prouver que

$$F_2(x) = x^2 + ax + b.$$

En effet, au voisinage de chacun des points de ramification l'intégrale (11) reste finie, à l'exception des points

$$x^2 + ax + b = 0;$$

aux environs de ces derniers, nous avons

$$\lim (u) = 0;$$

donc

$$\zeta(u) = \infty.$$

Par cette raison, nous avons

$$\int \frac{[f'(x)\psi(x) - \psi'(x)f(x)](x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx}{(x - \xi)(x^2 + ax + b) \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} (x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1) \\ \times (x^3 + a_2x^2 + b_2x + c_2)(x^2 + ax + b)(x - r) \end{array} \right\}}} \\ = A\zeta(u, g_2, g_3).$$

II

6. Considérons maintenant les intégrales réductibles de seconde espèce dépendant des radicaux des troisième, sixième et quatrième degrés.

Voici un exemple où la réduction s'effectuera à l'aide de la substitution entière. Soit donnée

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x + a)(x^2 + 2bx + c)^2}} = u.$$

Il faut choisir la fonction $F(x)$ de manière que

$$(14) \quad \int \frac{F(x)dx}{\sqrt[3]{(x + a)(x^2 + 2bx + c)^2}} = \zeta(u, 0, g_3).$$

Posons

$$(15) \quad x^2 + 2\alpha x + \beta = \lambda p'(u, 0, g_3).$$

Pour déterminer le degré k de la fonction $F(x)$, posons $x = \infty$ dans (14) et (15), nous avons alors

$$3k - 2 = 2, \quad k = \frac{4}{3}.$$

De l'équation (15) nous obtiendrons

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 + 2\alpha x + \beta &= \lambda \left(p'(u_0) + (u - u_0)p''(u_0) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (u - u_0)^2 p'''(u_0) \\ &\quad \left. + \frac{1}{1.2.3} (u - u_0)^3 p^{iv}(u_0) + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Aux environs du point de ramification

$$x + a = 0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - u_0)^{\frac{3}{2}}.$$

Aux environs des points de ramification

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - u'_0)^3.$$

Pour $x = \infty$ nous avons un développement avec la partie principale

$$u^{-\frac{3}{2}}.$$

A l'exception de ces valeurs, x est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan. Par cette raison, pour les valeurs

$$x + a = 0, \quad x^2 + 2bx + c = 0,$$

nous devons avoir

$$p(u_0) = 0,$$

c'est-à dire

$$p''(u_0) = 0, \quad p'''(u_0) = 0, \quad p^{iv}(u_0) \neq 0;$$

et nous avons

$$(17) \quad x^2 + 2\alpha x + \beta = \lambda p'(u_0) + \frac{\lambda}{1.2.3} (u - u_0)^3 p^{iv}(u_0) + \dots,$$

$$p'(u_0) = +\lambda \sqrt{-g_3}.$$

De l'équation (17) nous avons

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + \beta + \lambda \sqrt{-g_3} &= (x + a)^2, \\ x^2 + 2ax + \beta - \lambda \sqrt{-g_3} &= x^2 + 2bx + c. \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\alpha = a = b, \quad \beta + \lambda \sqrt{-g_3} = a^2, \quad \beta - \lambda \sqrt{-g_3} = c;$$

par conséquent

$$\beta = \frac{a^2 + c}{2}, \quad \lambda \sqrt{-g_3} = \frac{a^2 - c}{2}, \quad \lambda^2 g_3 = -\frac{1}{4} (a - c)^2.$$

Comme $k = \frac{4}{3}$, il faut prendre

$$F(x) = \sqrt[3]{f(x)},$$

$f(x)$ étant une fonction rationnelle. Désignons par $(x - x_0)^\gamma$ un facteur de la fonction $f(x)$ et admettons que $x - x_0 = 0$ n'est pas un point de ramification. De l'équation (14) nous aurons un développement de la forme

$$(x - x_0)^{\frac{\gamma + 3}{3}} = A_0(u - v)p(v) + \dots$$

et, comme $x - x_0$ doit être une fonction holomorphe aux environs du point

$$x - x_0 = 0,$$

nous devons avoir

$$\begin{aligned} \gamma &= -2, \\ x - x_0 &= B(u - v)^3 + \dots \end{aligned}$$

Cette égalité est impossible, il s'ensuit que

$$x - x_0 = 0$$

doit être un point de ramification. En posant

$$x_0 = -a,$$

nous avons

$$\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \quad \gamma = 2.$$

Admettant maintenant que x_0 est une racine quelconque de l'équation

$$x^2 + 2bx + c = 0,$$

nous devons avoir

$$\frac{\gamma}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}, \quad \gamma = 1.$$

Par conséquent

$$f(x) = (x + a)^2 (x^2 + 2bx + c);$$

donc

$$(18) \quad \int \sqrt[3]{\frac{x+a}{x^2+2ax+c}} dx = \frac{9}{4} \zeta(u, g_2, g_3).$$

7. Donnons encore un exemple. Soit donnée

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2+2ax+b)(x^2+2rx+s)^2}} = u.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle façon que

$$(19) \quad \int \frac{F(x)dx}{\sqrt[3]{(x^2+2ax+b)(x^2+2rx+s)^2}} = A\zeta(u, 0, g_3).$$

L'équation (19) nous montre que, aux environs de chacun des points

$$x^2 + 2rx + s = 0,$$

nous aurons un développement de x avec la partie principale u^3 .
Pour cette raison nous poserons

$$(20) \quad \frac{x^2 + 2rx + s}{x^2 + 2ax + b} = \lambda p'(u, 0, g_3).$$

De l'équation (19) on voit que, aux environs des points

$$x^2 + 2ax + b = 0,$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - v)^{\frac{2}{3}}.$$

L'équation (20) nous donne

$$\frac{x^2 + 2rx + s}{x^2 + 2ax + b} = \lambda p'(v) + \lambda(u - v)p''(v) + \frac{\lambda}{1.2} (u - v)^2 p'''(v) + \dots$$

Il est clair que, aux environs des points

$$x^2 + 2ax + b = 0,$$

nous devons avoir

$$p(\varphi) = 0, \quad p''(\varphi) = 6p^2(\varphi) = 0, \quad p'''(\varphi) = 12p(\varphi)p'(\varphi) = 0;$$

$$p'(\varphi) = \pm \sqrt{-g_3}, \quad p^{iv}(\varphi) \neq 0,$$

En désignant

$$\lambda \sqrt{-g_3} = h,$$

nous obtiendrons

$$x^2 + 2 \frac{\alpha + hr}{1 + h} x + \frac{\beta + hs}{1 + h} = (x - x_1)^2,$$

$$x^2 + 2 \frac{\alpha - hr}{1 - h} x + \frac{\beta - hs}{1 - h} = (x - x_2)^2,$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 2ax + b.$$

Par conséquent

$$\frac{\alpha + hr}{1 + h} + \frac{\alpha - hr}{1 - h} = 2a,$$

$$\frac{\alpha^2 - h^2 r^2}{1 - h^2} = b.$$

En outre

$$(\alpha + hr)^2 = (1 + h)(\beta + hs),$$

$$(\alpha - hr)^2 = (1 - h)(\beta - hs).$$

On peut présenter ces équations de la manière suivante

$$1^\circ \quad \alpha - h^2 r = a(1 - h^2),$$

$$2^\circ \quad 2xr = \beta + s,$$

$$3^\circ \quad \alpha^2 + h^2 r^2 = \beta + h^2 s,$$

$$4^\circ \quad \alpha^2 - h^2 r^2 = b(1 - h^2);$$

d'où il suit que

$$(I) \quad b + s = 2ar, \quad h^2 = \frac{a - \alpha}{a - r}, \quad 1 - h^2 = \frac{\alpha - r}{a - r};$$

$$(II) \quad (\alpha - r)^2 = \frac{(r^2 - s)(\alpha - r)}{a - r}, \quad \alpha = \frac{ar - s}{a - r};$$

$$(III) \quad \beta = \frac{as - br}{r - a}, \quad \lambda^2 g_3 = \frac{b - a^2}{(r - a)^2}.$$

Enfin, faisant $x = \infty$ dans l'équation (20), nous trouvons

$$\lambda p'u = 1, \quad 2(\alpha - a) = -6\lambda p^2(u);$$

d'où il suit que

$$\lambda = \frac{3^3}{2^4} \frac{1}{(r-a)(r^2-s)}.$$

Par conséquent

$$\frac{(a-r)x^2 + 2(ar-s)x + br - as}{x^2 + 2rx + s} = \frac{3^3}{2^4} \frac{p'(u, 0, g_3)}{(r-a)(r^2-s)}.$$

Il est facile de prouver :

1° Que le degré de $F(x)$ est

$$k = 2;$$

2° Que

$$F(x) = \sqrt[3]{f(x)},$$

où $f(x)$ est une fonction rationnelle ;

3° Que $f(x)$ peut renfermer seulement des facteurs $(x - x_0)^\alpha$ pour lesquels $p(u_0) = 0$, c'est-à-dire des facteurs

$$(a) \quad (x^2 + 2ax + b),$$

$$(b) \quad (x^2 + 2rx + s).$$

Si $f(x)$ renferme un facteur $(x - x_0)^j$ du polynôme (a), nous avons

$$\frac{j-1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \quad j = 2.$$

Si $f(x)$ renferme un facteur $(x - x_0)^i$ du polynôme (b), nous avons

$$\frac{i-2}{3} + 1 = 2, \quad i = 1.$$

donc

$$\int \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2rx + s}} dx = A\zeta(u, 0, g_3),$$

$$b + s = 2ar;$$

A est un facteur constant, facile à déterminer.

8. Considérons maintenant les intégrales dépendant des radicaux du sixième degré. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4 (x-b)^2 (x^2 + 2cx + e)^3}} = u.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle manière que

$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4 (x-b)^2 (x^2 + 2cx + e)^3}} = A\zeta(u, 0, g_3).$$

Au voisinage du point de ramification

$$x - a = 0$$

nous avons un développement avec la partie principale u^3 ; pour cette raison supposons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2} = \lambda p^3(u, 0, g_3),$$

$f(x)$ étant un polynôme. Nous avons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} \lambda \left[p(u_0) + (u - u_0)p'(u_0) + \frac{1}{2} (u - u_0)^2 p''(u_0) + \dots \right]^3.$$

Aux environs du point de ramification

$$x - b = 0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - u_0)^{\frac{3}{2}};$$

par conséquent, prenons

$$p(u_0) = 0, \quad f(x) = (x - b)^2;$$

alors

$$(21) \quad \left(\frac{x-b}{x-a} \right)^2 = \lambda p^3(u, 0, g_3).$$

Aux environs des points de ramification

$$x^2 + 2cx + e = 0$$

nous avons un développement avec la partie principale

$$(u - u_0)^2.$$

Par conséquent, en prenant

$$p'(u_0) = 0, \quad \lambda p^3(u_0) = \frac{1}{4} \lambda g_3 = h,$$

nous aurons

$$\left(\frac{x-b}{x-a} \right)^2 - \frac{1}{4} \lambda g_3 = \frac{3}{2} p^2(u_0) p''(u_0) (u - u_0)^2 + \dots;$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \frac{ah - b}{1 - h} x + \frac{b^2 - a^2 h}{1 - h} &= x^2 + 2cx + e, \\ \frac{ah - b}{1 - h} &= c, \quad \frac{b^2 - a^2 h}{1 - h} = e, \\ h &= \frac{1}{4} \lambda g_3 = \frac{b + c}{a + c}, \\ e &= -(ab + bc + ac). \end{aligned}$$

Pour $x = \infty$ nous aurons un développement avec la partie principale

$$(u - v)^{-1}.$$

D'autre part, l'équation (21) nous donne

$$(22) \quad 1 + 2(a - b) \frac{1}{x} + \dots = \lambda [p v + (u - v) p' v + \dots]^3;$$

par conséquent

$$\lambda p^3(v) = 1, \quad 3\lambda p^2(v) p'(v) = 2(b - a);$$

d'où

$$\lambda = \frac{3^3}{(a - b)^3 (a + c)^3};$$

par conséquent

$$g_3 = \frac{2^2}{3^9} (a - b)^3 (a + c) (b + c).$$

De l'équation

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt[6]{(x - a)^4 (x - b)^2 (x^3 + 2cx + e)^3}} = A \zeta(u, 0, g_3)$$

nous aurons, pour $x = \infty$, un développement avec la partie principale

$$(u - v)^{\frac{1}{k-1}},$$

k étant le degré de la fonction $F(x)$. D'autre part, l'équation (22) nous donne un développement avec la partie principale

$$(u - v)^{-1},$$

donc

$$k = 0.$$

L'équation (21) nous montre que x est une fonction holomorphe de u dans toute l'étendue du plan, sauf un seul point

$$x - b = 0,$$

pour lequel nous avons

$$p(u_0) = 0, \quad p'(u_0) \neq 0.$$

En posant que $F(x)$ renferme le facteur $(x - b)^i$ nous devons avoir

$$i - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \quad i = \frac{2}{3}.$$

En posant que $F(x)$ renferme le facteur $(x - a)^{i'}$, nous aurons

$$i' - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}, \quad i' = -\frac{2}{3}.$$

Posons enfin que $F(x)$ renferme $(x^2 + 2cx + e)^{i''}$; alors

$$i'' - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \quad i'' = 0.$$

Par conséquent

$$F(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^2}.$$

$$\int \frac{1}{x-a} \sqrt[6]{\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2(x^2+2cx+e)^3}} dx = A\zeta(u, 0, g_3),$$

A étant une constante, facile à déterminer.

9. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)^3(x-c)^2x^2}} = u.$$

Il faut choisir $F(x)$ de telle sorte que

$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)^3(x-c)^2x^3}} = A\zeta(u, g_2, 0).$$

Aux environs du point $x - a = 0$ nous avons un développement de x avec la partie principale

$$\frac{4}{u^3}.$$

Par cette raison, supposons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = \lambda^2 p^2(u, g_2, 0),$$

$f(x)$ étant un polynôme. Nous avons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = \lambda \left[p(u_0) + (u-u_0)p'(u_0) + \frac{1}{2}(u-u_0)^2 p''(u_0) + \dots \right]^2.$$

Au voisinage du point $x-b=0$ nous avons un développement avec la partie principale

$$(u-u_0)^4.$$

D'autre part, si nous prenons

$$p(u_0) = 0,$$

il vient

$$p'(u_0) = 0, \quad p''(u_0) \neq 0,$$

et alors

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3} = (u-u_0)^4 \Phi(u),$$

$\Phi(u)$ étant une fonction holomorphe, et

$$\Phi(u_0) \neq 0.$$

Pour cette raison

$$f(x) = (x-b)f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme. Au voisinage du point $x-c=0$ nous devons avoir un développement de x avec la partie principale

$$(u-u_0)^2;$$

on peut donc prendre

$$p(u_0) = 0, \quad p'(u_0) = 0, \quad p''(u_0) \neq 0, \\ f_1(x) = (x-c)^2;$$

et alors nous avons

$$(23) \quad \psi(x) = \frac{(x-b)(x-c)^2}{(x-a)^3} = \lambda p^2(u).$$

Si, dans cette équation, nous prenons

$$4p^2(v) = g_2,$$

il viendra

$$\psi(x) = \frac{1}{4} \lambda g_2 + (u-v)^2 \Phi_1(u),$$

$\Phi_1(u)$ étant une fonction holomorphe, et

$$\Phi_1(v) \neq 0$$

En outre

$$\begin{aligned} \psi(x_0) + (x - x_0) \psi'(x_0) \\ + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} \psi''(x_0) + \dots = \frac{1}{4} \lambda g_2 + (u - \varphi^2) \Phi_1(u). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\psi'(0) \neq 0,$$

car $x = 0$ est un point de ramification. Il s'ensuit que

$$(x - b)(x - c)^2 - \frac{1}{4} \lambda g_2 (x - a)^3 = x(x - \alpha)^2,$$

α étant la racine de l'équation

$$\psi'(x) = 0.$$

Il est facile de prouver que

$$\alpha = \frac{3bc - ac - 2ab}{b + 2c - 3a}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \frac{1}{4} \lambda g_2 = \frac{bc^2}{a^3}; \\ 2^\circ \quad & \frac{2(ac + 2ab - 3bc)}{b + 2c - 3a} = \frac{a(3bc^2 - a^2b - 2a^2c)}{a^3 - bc^2}; \\ 3^\circ \quad & \frac{2ab + ac - 3bc}{(b + 2c - 3a)^2} = \frac{a^2c}{a^3 - bc^2}. \end{aligned}$$

De ces équations on déduit l'égalité suivante

$$ab + 3bc - 4ac = 0$$

qui exprime la condition nécessaire et suffisante de la réductibilité de notre intégrale.

De l'équation (23) nous avons, pour $x = \infty$, un développement de la forme

$$1 + (3a - b - 2c) \frac{1}{x} + \dots = \lambda p^2(\varphi) + 2\lambda p(\varphi)p'(\varphi)(u - \varphi) + \dots;$$

par conséquent

$$\lambda p^2(\varphi) = 1, \quad (3a - b - 2c)^2 = 4\lambda^2 p^2(\varphi)[4p^3(\varphi) - g_2 p(\varphi)].$$

Il s'ensuit que

$$\lambda = \frac{2^8(a^3 - bc^2)^2}{a^6(b + 2c - 3a)^4},$$

$$g_2 = \frac{a^3bc^2(b + 2c - 3a)^4}{2^6(a^3 - bc^2)^2}.$$

Nous avons

$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)^3(x-c)^2x^2}} = \zeta(v) - (u-v)p(v) + \frac{(u-v)^2}{1.2} p'(v) + \dots$$

De ce qui précède on voit que x est une fonction holomorphe de u dans toute l'étendue du plan, sauf un seul point de ramification $x - a = 0$. En supposant que $F(x)$ renferme le facteur $(x - a)^j$, nous aurons

$$j - \frac{1}{4} + 1 = -\frac{3}{4}, \quad j = -\frac{3}{2}.$$

De même, il est facile de voir que $F(x)$ renferme $(x - b)^{\frac{1}{2}}$ et $(x - c)$. Et comme le degré de $F(x)$ est $k = 0$, nous aurons

$$F(x) = \sqrt[4]{\frac{(x-b)^2(x-c)^4}{(x-a)^6}}.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\int \frac{1}{x-a} \sqrt[4]{\frac{(x-c)^2}{x^2(x-a)^3(x-b)}} dx = A\zeta(u, g_2, 0).$$

SUR LA LIAISON
ENTRE LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION
DES FONCTIONS ELLIPTIQUES
ET LA THÉORIE ANALYTIQUE
DE LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES
ABÉLIENNES

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, XXVIII, 1904, pp. 210-232)

1. Pour plus de simplicité nous considérons, dans cette Communication, les intégrales abéliennes de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{(x-t)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

En posant

$$(1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u,$$

nous avons le développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{3}}, \quad \lambda \lim (u) = 0.$$

Par conséquent, si la réduction de l'intégrale (1) est possible à l'aide de la substitution

$$(2) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda(pu - e_i),$$

nous devons avoir les deux points suivants : 1^o les degrés des polynômes fx et $\varphi(x)$ sont respectivement $(k+3)$ et k ; 2^o les degrés des polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont k et $(k+3)$. Dans ce dernier cas, pour $x = \infty$, nous aurons

$$p(u) - e_i = 0, \quad u = \omega_i.$$

Par cette raison de l'équation (2) nous aurons un développement de la forme

$$x^{-3}F(y) = \frac{\lambda(u - \omega_i)^2}{2} p''(\omega_i) + \dots,$$

$F(y)$ est une fonction holomorphe de $y = \frac{1}{x}$, et

$$F(0) \neq 0.$$

Les raisonnements sont, pour les deux cas mentionnés, entièrement identiques; c'est pourquoi nous considérons seulement le premier cas. Supposons d'abord que les degrés des polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont respectivement $2n + 3$ et $2n$. Pour les valeurs de x , satisfaisant à l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

nous aurons

$$p(u) = \infty.$$

En désignant les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

par

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots,$$

nous avons

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^{k_1}(x - \xi_2)^{k_2}\dots$$

Au voisinage du point

$$x - \xi_i = 0$$

nous avons un développement de la forme

$$(x - \xi_i)^{k_i} = u^2 F(u),$$

$F(u)$ est une fonction holomorphe, et

$$F(0) \neq 0.$$

Et, comme x est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, à l'exception

$$x = \infty,$$

nous devons avoir ou

$$k_i = 2,$$

ou

$$k_i = 1;$$

dans ce dernier cas, ξ_i est un point de ramification. Par cette raison, nous avons les deux hypothèses suivantes :

$$(I) \quad \varphi(x) = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2),$$

$$(II) \quad \varphi(x) = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2,$$

Conformément à la formule (I) nous obtiendrons, évidemment, les résultats suivants :

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2 (x - \alpha_{n+1})^2 (x - x_3)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x - \beta_1)^2 (x - \beta_2)^2 \dots (x - \beta_{n+1})^2 (x - x_4)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \dots (x - \gamma_{n+1})^2 (x - x_5)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2)}.$$

Conformément à la forme (II) nous avons

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2 (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x - \beta_1)^2 (x - \beta_2)^2 \dots (x - \beta_{n+1})^2 (x - x_4)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \dots (x - \gamma_{n+1})^2 (x - x_5)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2}.$$

Si la réduction est possible à l'aide de la formule

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

les quantités

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_{n+1}, \\ \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_{n+1}, \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_{n+1}, \end{array}$$

sont, évidemment les racines de l'équation

$$f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x) = 0.$$

2. Il est clair que la réduction est possible aussi dans le cas où le degré du polynôme $\varphi(x)$ est un nombre impair $(2n + 1)$, le degré du numérateur $f(x)$ est pair $(2n + 4)$. Alors nous obtiendrons les trois cas de la réduction.

1° En posant

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1),$$

nous avons

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_{n+1})^2 (x - x_2) (x - x_3)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x - \beta_1)^2 (x - \beta_2)^2 \dots (x - \beta_{n+1})^2 (x - x_4) (x - x_5)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \dots (x - \gamma_{n+2})^2}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)};$$

ou encore

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x - \alpha_1)^2 \dots (x - \alpha_n)^2 (x - x_2) (x - x_3) (x - x_4) (x - x_5)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x - \beta_1)^2 (x - \beta_2)^2 \dots (x - \beta_{n+2})^2}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \dots (x - \gamma_{n+2})^2}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)},$$

2° En posant

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3),$$

nous avons

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_{n+1})^2 (x - x_4) (x - x_5)}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x - \beta_1)^2 (x - \beta_2)^2 \dots (x - \beta_{n+2})^2}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \dots (x - \gamma_{n+2})^2}{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)}.$$

3° Enfin, si nous avons

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^2 \dots (x - \xi_{n-1})^2 R(x),$$

nous obtiendrons les trois formules de la réduction

$$\lambda(pu - e_1) = \frac{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_{n+2})^2}{\varphi(x)},$$

$$\lambda(pu - e_2) = \frac{(x - \beta_1)^2 (x - \beta_2)^2 \dots (x - \beta_{n+2})^2}{\varphi(x)},$$

$$\lambda(pu - e_3) = \frac{(x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \dots (x - \gamma_{n+2})^2}{\varphi(x)}.$$

Dans toutes les formules précédentes nous avons

$$\lambda = \frac{4}{9}.$$

3. Il est facile de prouver que, dans tous les cas où la réduction de l'intégrale (I) est possible à l'aide des formules précédentes, le polynôme $R(x)$ peut renfermer seulement deux paramètres arbitraires. Considérons, par exemple, le cas où

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 (x - \xi_3)^2 \dots (x - \xi_n)^2.$$

Posons

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda p u,$$

$f(x)$ étant un polynôme du degré $2n + 3$. Alors $f(x)$ renferme $2n + 3$ paramètres arbitraires; $\varphi(x)$ renferme n paramètres

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \dots, \quad \xi_n;$$

en outre, parmi les quantités

$$e, \quad e_2, \quad e_3,$$

nous avons deux arbitraires; donc nous avons

$$2n + 3 + n + 2 = 3n + 5$$

paramètres arbitraires. A l'aide de ces $3n + 5$ quantités il faut satisfaire aux conditions suivantes :

1° Il faut que le polynôme

$$f(x) - e_1 \varphi(x)$$

soit divisible par le polynôme

$$(x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)$$

du troisième degré, et le quotient

$$\frac{f(x) - e_1 \varphi(x)}{(x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)}$$

doit être un carré parfait; il faut donc remplir $(n + 3)$ conditions.

2° Il faut que le polynôme

$$f(x) - e_2 \varphi(x)$$

soit divisible par $(x - x_4)$, et le quotient

$$\frac{f(x) - e_2 \varphi(x)}{x - x_4}$$

doit être un carré parfait ; par conséquent il faut remplir $(n + 2)$ conditions.

3° Enfin le polynôme

$$f(x) - e_3 \varphi(x)$$

doit être divisible par $(x - x_3)$, et le quotient

$$\frac{f(x) - e_3 \varphi(x)}{x - x_3}$$

doit être un carré parfait. Nous devons remplir $(n + 2)$ conditions. Le nombre total des conditions à remplir sera

$$n + 3 + n + 2 + n + 2 = 3n + 7.$$

De ce qui précède, il suit que nous devons avoir les deux équations des conditions entre les coefficients du polynôme

$$R(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

4. Proposons-nous d'étudier la réductibilité des intégrales de la forme

$$\int \frac{(x - t)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

t est une quantité indéterminée. Posons

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3).$$

Nous considérons seulement le cas où les degrés des polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont respectivement $2n + 1$ et $2n$. Le polynôme $\varphi(x)$ peut avoir l'une des trois formes suivantes :

$$1^\circ \quad \varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2,$$

$$2^\circ \quad \varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2),$$

$$3^\circ \quad \varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots \\ \times (x - \alpha_{n-2})^2 (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3) (x - x_4).$$

Si nous avons

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2,$$

alors

$$\begin{aligned}\lambda(pu - e_1) &= \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)}{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2}, \\ \lambda(pu - e_2) &= \frac{(x - \eta_1)^2 (x - \eta_2)^2 \dots (x - \eta_n)^2 (x - x_2)}{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2}, \\ \lambda(pu - e_3) &= \frac{(x - \zeta_1)^2 (x - \zeta_2)^2 \dots (x - \zeta_{n-1})^2 (x - x_3) (x - x_4) (x - x_5)}{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2},\end{aligned}$$

Si nous avons

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2),$$

il vient

$$\begin{aligned}\lambda(pu - e_1) &= \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_3)}{(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_{n-1})^2 (x - x_1) (x - x_2)}, \\ \lambda(pu - e_2) &= \frac{(x - \eta_1)^2 (x - \eta_2)^2 \dots (x - \eta_n)^2 (x - x_4)}{\varphi(x)}, \\ \lambda(pu - e_3) &= \frac{(x - \zeta_1)^2 (x - \zeta_2)^2 \dots (x - \zeta_n)^2 (x - x_5)}{\varphi(x)}.\end{aligned}$$

Enfin, dans le cas où

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 \dots (x - \alpha_{n-2}) (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3) (x - x_4),$$

la réduction est évidemment impossible.

Il est facile de prouver que, si

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 \dots (x - \alpha_n)^2 = [\psi(x)]^2,$$

$$\begin{array}{cccc}\xi_1, & \xi_2, & \dots, & \xi_n, \\ \eta_1, & \eta_2, & \dots, & \eta_n, \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \dots, & \zeta_{n-1}\end{array}$$

sont les racines de l'équation

$$(3) \quad f'(x)\psi(x) - 2\psi'(x)f(x) = 0.$$

Au voisinage du point

$$x - t = 0$$

nous aurons un développement avec la partie principale

$$(u - v)^{\frac{1}{2}},$$

ν étant une constante. De l'équation

$$\lambda p u = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = F(x)$$

nous avons le développement

$$F(t) + (x-t)F'(t) + \frac{(x-t)^2}{1.2} F''(t) + \dots = \lambda[p\varphi + (u-\varphi)p'\nu + \dots],$$

$$F(t) = \lambda p(\nu).$$

Par conséquent

$$F'(t) = 0, \quad p'(\nu) \neq 0,$$

donc

$$f'(t)\psi(t) - 2\psi'(t)f(t) = 0.$$

Et comme le degré de l'équation (3) est $3n$, toutes les racines de cette équation sont comprises dans le Tableau suivant :

$\xi_1,$	$\xi_2,$	$\dots,$	$\xi_n,$	
$\eta_1,$	$\eta_2,$	$\dots,$	$\eta_n,$	
$\zeta_1,$	$\zeta_2,$	$\dots,$	$\zeta_{n-1},$	$t,$

d'où il suit que

$$\frac{f'(x)\psi(x) - 2\psi'(x)f(x)}{(x-\xi_1)\dots(x-\xi_n)(x-\eta_1)\dots(x-\eta_n)(x-\zeta_1)\dots(x-\zeta_{n-1})} = \Lambda(x-t),$$

Λ est un facteur numérique.

5. Comme le degré du polynôme $f(x)$ est égal à $2n + 1$, nous avons $2n + 1$ paramètres arbitraires. Comme

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^2 \dots (x - \alpha_n)^2 = [\psi(x)]^2,$$

nous avons encore n paramètres arbitraires. En outre, parmi les trois quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3,$$

nous avons deux arbitraires; donc nous avons

$$2n + 1 + n + 2 = 3n + 3$$

paramètres arbitraires. A l'aide de ces $3n + 3$ quantités nous devons satisfaire aux conditions suivantes :

1° De l'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - e_1 = \frac{f(x) - e_1\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x - \xi_1)^2 \dots (x - \xi_n)^2 (x - x_1)}{\varphi(x)}$$

on voit que le polynôme

$$f(x) - e_1 \varphi(x)$$

doit être divisible par $(x - x_1)$, et le quotient

$$\frac{f(x) - e_1 \varphi(x)}{x - x_1}$$

doit être un carré parfait; donc nous aurons les $(n + 1)$ conditions.

2° De l'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - e_2 = \frac{f(x) - e_2 \varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x - \eta_1)^2 \dots (x - \eta_n)^2 (x - x_2)}{\varphi(x)}$$

nous avons encore les $(n + 1)$ conditions.

3° De l'équation

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} - e_3 &= \frac{f(x) - e_3 \varphi(x)}{\varphi(x)} \\ &= \frac{(x - \zeta_1)^2 \dots (x - \zeta_{n-1})^2 (x - x_3) (x - x_4) (x - x_5)}{\varphi(x)} \end{aligned}$$

on voit que le polynôme

$$f(x) - e_3 \varphi(x)$$

doit être divisible par

$$(x - x_3) (x - x_4) (x - x_5),$$

et le quotient

$$\frac{f(x) - e_3 \varphi(x)}{(x - x_3) (x - x_4) (x - x_5)}$$

doit être un carré parfait. Par cette raison, il faut satisfaire à $(n + 3)$ conditions. Nous avons donc

$$n + 1 + n + 1 + 3 + n - 1 = 3n + 4$$

conditions. Par conséquent, nous devons avoir une seule équation des conditions entre les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned} R(x) &= (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3) (x - x_4) (x - x_5) \\ &= x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d. \end{aligned}$$

Dans le problème de la transformation des fonctions elliptiques, le nombre des conditions à satisfaire est toujours égal au nombre des paramètres arbitraires.

6. *Réduction par la substitution du second ordre.* — Nous considérons un seul exemple qui se rattache à notre Communication antérieure ⁽¹⁾. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{(x+t)dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+cx+d)}} = u.$$

Posons

$$(4) \quad \frac{(x+\alpha)^2}{x+a} = 4(pu - e_1).$$

En désignant

$$4(e_1 - e_2) = \sigma, \quad 4(e_1 - e_3) = \tau,$$

nous obtiendrons

$$[x^2 + (2\alpha + \sigma)x + \alpha^2 + a\sigma][x^2 + (2\alpha + \tau)x + \alpha^2 + a\tau] = x^4 + bx^2 + cx + d.$$

D'où il suit que

$$1^\circ \quad 4\alpha + \sigma + \tau = 0$$

ou

$$4\alpha + 12e_1 = 0, \quad 3e_1 = -\alpha;$$

2°

$$6\alpha^2 + 2\alpha(\sigma + \tau) + a(\sigma + \tau) + \sigma\tau = b$$

ou

$$6\alpha^2 - (a + 2\alpha)4\alpha + \sigma\tau = b$$

ou

$$\sigma\tau = b + 4a\alpha + 2\alpha^2;$$

3°

$$4\alpha^3 + (\alpha^2 + 2a\alpha)(\sigma + \tau) + 2a\sigma\tau = c,$$

d'où

$$c = 2ab + 4a\alpha^2 + 8a^2\alpha;$$

4°

$$d = \alpha^4 - 4a\alpha^3 + 2a^2\alpha^2 + 4a^3\alpha + a^2b.$$

De l'équation 3° nous aurons

$$\alpha^2 - 2a\alpha + \frac{c - 2ab}{4a} = 0,$$

(5)

$$\alpha = a \pm \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}.$$

Des formules précédentes nous obtiendrons encore

(6)

$$(c - 2ab)^2 = 8a^2(2d - ac).$$

⁽¹⁾ Bull. des Sciences math., 2^e série, t. XXVII, juin 1903.

En différentiant l'équation (4), nous trouvons

$$(x + \alpha)(x + 2a - \alpha) = 0,$$

d'où il suit que

$$t = 2a - \alpha.$$

D'après l'équation (5), nous aurons pour t les deux valeurs suivantes :

$$t_1 = a - \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}},$$

$$t_2 = a + \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}.$$

Par conséquent nous avons les deux intégrales réductibles

$$\int \frac{x + a - \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}}{\sqrt{(a + x)(x^4 + bx^2 + cx + d)}} dx,$$

$$\int \frac{x + a + \sqrt{a^2 + \frac{2ab - c}{4a}}}{\sqrt{(x + a)(x^4 + bx^2 + cx + d)}} dx;$$

les coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad d$$

satisfont à la condition (6).

La détermination des autres éléments de la réduction se fait à l'aide des formules

$$\sigma + \tau = -4x, \quad \sigma\tau = b + 4ax + 2x^2,$$

c'est-à-dire

$$12e_1 = -4x, \quad 16(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = b + 4ax + 2x^2.$$

En posant

$$c = 2ab$$

nous aurons

$$\alpha = a \pm a,$$

c'est à-dire

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2a,$$

$$t_1 = 2a, \quad t_2 = 0,$$

$$d = a^2b.$$

Par conséquent, dans ce cas particulier, nous avons les deux intégrales réductibles

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x+a)(x^2+bx^2+2abx+a^2b)}},$$

$$\int \frac{(x+2a)dx}{\sqrt{(x+a)(x^2+bx^2+2abx+a^2b)}}.$$

En concordance avec le théorème très connu de M. Picard ⁽¹⁾, nous avons les deux intégrales réductibles, dépendantes d'une même courbe du genre deux.

7. Avant de passer à la réduction par les substitutions du troisième ordre, nous étudierons d'abord la transformation des fonctions elliptiques du même ordre.

Transformation du troisième ordre. — Soit donnée l'intégrale

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = u.$$

Posons

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2y - \bar{g}_3}},$$

$$\varphi(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^2} = \bar{p}(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3),$$

a, b, c, α étant des indéterminées. Nous avons

$$x^3 + (a - \bar{e}_1)x^2 + (b + 2\alpha\bar{e}_1)x + c - \alpha^2\bar{e}_1 = (x - \xi)^2(x - e_1),$$

$$x^3 + (a - \bar{e}_2)x^2 + (b + 2\alpha\bar{e}_2)x + c - \alpha^2\bar{e}_2 = (x - \eta)^2(x - e_2),$$

$$x^3 + (a - \bar{e}_3)x^2 + (b + 2\alpha\bar{e}_3)x + c - \alpha^2\bar{e}_3 = (x - \zeta)^2(x - e_3),$$

où

$$\xi, \eta, \zeta$$

sont les racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad x^3 - 3\alpha x^2 - (b + 2a\alpha)x - (b\alpha + 2c) = 0.$$

⁽¹⁾ Bull. de la Soc. math., t. XII, p. 153.

De la divisibilité des polynômes

$$\begin{aligned} x^3 + (a - \bar{e}_1)x^2 + (b + 2x\bar{e}_1)x + c - \alpha^2\bar{e}_1, \\ x^2 - 2\xi x + \xi^2, \end{aligned}$$

nous concluons

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & 2\xi + a - \bar{e}_1 = -e_1, \\ 2^\circ \quad & 2\xi^3 + \xi^2(a - \bar{e}_1) - c + \alpha^2\bar{e}_1 = 0, \\ 3^\circ \quad & 3\xi^2 + 2\xi(a - \bar{e}_1) + b + 2x\bar{e}_1 = 0. \end{aligned}$$

De ces équations et de leurs analogues, nous trouverons

$$2 \sum \xi = 2(\xi + \eta + \zeta) = -3a.$$

De l'équation (7), nous avons

$$\sum \xi = 3x,$$

donc

$$a = -2x.$$

Il est facile de prouver que

$$\begin{aligned} 2(\xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3) &= 2 \sum \xi e_1 = b - \alpha^2, \\ \xi^2 e_1 + \eta^2 e_2 + \zeta^2 e_3 &= \sum \xi^2 e_1 = -3c. \end{aligned}$$

Ayant l'équation

$$\frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^2} - \frac{\bar{e}_1}{e_1} = \frac{(x - e_1)(x - \xi)^2}{(x - \alpha)^2},$$

nous poserons

$$x = e_1;$$

alors

$$(8) \quad \frac{(b - \alpha^2)e_1 + c}{(x - e_1)^2} = 2\xi - 2x;$$

par conséquent

$$(b - \alpha^2) \sum \frac{e_1}{(x - e_1)^2} + c \sum \frac{1}{(x - e_1)^2} = 2 \sum \xi - 6x = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum \frac{e_1}{(x - e_1)^2} &= \frac{16g_2x^3 + 36g_3x^2 - g_2g_3}{(4x^3 - g_2x - g_3)^2}, \\ \sum \frac{1}{(x - e_1)^2} &= \frac{24g_2x^2 + 72g_3x + 2g_2^2}{(4x^3 - g_2x - g_3)^3}; \end{aligned}$$

par conséquent

$$(9) \quad (16g_2x^3 + 36g_3x^2 - g_2g_3)(b - x^2) + (24g_2x^2 + 72g_3x + 2g_2^2)c = 0.$$

De l'équation (8), nous obtiendrons

$$\frac{(b - x^2)e_1 + c}{x - e_1} = 2\xi x - 2\xi e_1 - 2x^2 + 2xe_1.$$

D'où il suit que

$$(b - x^2) \sum \frac{e_1}{x - e_1} + c \sum \frac{1}{x - e_1} = 2x \sum \xi - 2 \sum \xi e_1 - 6x^2$$

ou

$$(b - x^2) \sum \frac{e_1}{x - e_1} + c \sum \frac{1}{x - e_1} = -(b - x^2).$$

Et comme

$$\sum \frac{e_1}{x - e_1} = \frac{2g_2x + 3g_3}{4x^3 - g_2x - g_3},$$

$$\sum \frac{1}{x - e_1} = \frac{12x^2 - g_2}{4x^3 - g_2x - g_3},$$

nous aurons

$$(10) \quad (4x^3 + g_2x + 2g_3)(b - x^2) + (12x^2 - g_2)c = 0.$$

Des équations (9) et (10) on peut conclure

$$b - x^2 = 0, \quad c = 0;$$

mais alors l'équation (7) prendra la forme

$$x^3 - 3xx^2 + 3x^2x - x^3 = (x - x)^3,$$

ce qui est impossible ; donc

$$\left| \begin{array}{cc} (16g_2x^3 + 36g_3x^2 - g_2g_3, & (24g_2x^2 + 72g_3x + 2g_2^2) \\ (4x^3 + g_2x + 2g_3), & (12x^2 - g_2) \end{array} \right| = 0$$

ou

$$96g_2x^5 + 144g_3x^4 - 48g_2^2x^3 - 168g_2g_3x^2 - (2g_2^3 + 144g_3^2)x - 3g_2^2g_3 = 0$$

ou

$$(48x^4 - 24g_2x^2 - 48g_3x - g_2^2)(2g_2x + 3g_3) = 0.$$

D'où il résulte l'équation

$$(11) \quad 48x^4 - 24g_2x^2 - 48g_3x - g_2^2 = 0;$$

par conséquent

$$\alpha = p\left(\frac{2\omega}{3}, g_2, g_3\right) \quad (1).$$

Ce résultat concorde complètement avec la solution transcendante du problème de la transformation (2).

8. Il est facile de prouver que

$$\begin{aligned} \sum \xi^2 e_1 &= -3c, \\ 2 \sum \xi e_1^2 &= 3c + 2x(b - \alpha^2) + g_2 x, \\ \sum \xi^2 e_1^2 &= \alpha^2(b - \alpha^2) + \frac{1}{2} g_2 x^2. \end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$b - \alpha^2 = \sigma, \quad c = \tau.$$

L'équation (8) nous donne

$$2\xi e_1 \sigma + 2\xi \tau = 4(\xi^2 - \alpha \xi)(\alpha^2 - 2e_1 x + e_1^2);$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\sigma \sum \xi e_1 + 2\tau \sum \xi &= 4x^2 \sum \xi^2 - 4x^3 \sum \xi - 8x \sum \xi^2 e_1 \\ &\quad + 8x^2 \sum \xi e_1 + 4 \sum \xi^2 e_1^2 - 4x \sum \xi e_1^2, \end{aligned}$$

ou bien

$$\sigma^2 + 6x\tau = 12x^2\sigma + 18x\tau$$

ou

$$\sigma^2 - 12x\sigma = 12x\tau.$$

A l'aide de l'équation (10), nous obtiendrons

$$(12x^2 - g_2)(\sigma^2 - 12x\sigma) + 12x\sigma(4x^3 + g_2x + 2g_3) = 0.$$

Et comme

$$\sigma = b - \alpha^2 \neq 0,$$

nous avons

$$\sigma = \frac{24g_2x^2 + 72g_3x + 2g_3^2}{12x^2 - g_2}.$$

(1) HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. III, p. 214.

(2) *Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXVII, novembre 1903.

Maintenant remarquons que

$$(12x^2 - g_2)^2 = 144x^4 - 24g_2x^2 + g_2^2.$$

De l'équation (11) nous avons

$$144x^4 = 72g_2x^2 + 144g_3x + 3g_2^2;$$

par conséquent

$$(12x^2 - g_2)^2 = 48g_2x^2 + 144g_3x + 4g_2^2 = 2(24g_2x^2 + 72g_3x + 2g_2^2).$$

Par conséquent

$$\sigma = (b - x^2) = 6x^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$\tau = c = -(2x^3 + \frac{1}{2}g_2x + g_3).$$

Pour les coefficients de l'équation (7), nous obtiendrons les expressions suivantes :

$$b + 2ax = 3x^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$2c + bx = 4x^3 - \frac{3}{2}g_2x - 2g_3.$$

Par cette raison, l'équation (7) aura la forme suivante

$$12) \quad x^3 - 3xx^2 - (3x^2 - \frac{1}{2}g_2)x - (4x^3 - \frac{3}{2}g_2x - 2g_3) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$x_1 = p\left(\frac{\omega}{3}, g_2, g_3\right),$$

$$x_2 = p\left(\frac{\omega}{3} + \omega', g_2, g_3\right),$$

$$x_3 = p\left(\frac{\omega}{3} + \omega + \omega', g_2, g_3\right).$$

9. Détermination des invariants $\bar{g}_2, \bar{g}_3$. — De l'équation

$$a - \bar{e}_1 = -2\xi - e_1 \quad (\text{n}^\circ 7),$$

nous avons

$$2x + \bar{e}_1 = 2\xi + e_1,$$

$$2x + \bar{e}_2 = 2\eta + e_2,$$

$$2x + \bar{e}_3 = 2\zeta + e_3,$$

d'où il suit

$$4x^2 - 2x\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_2 = 4\xi\eta + 2e_2\xi + 2e_1\eta + e_1e_2,$$

$$4x^2 - 2x\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 = 4\xi\zeta + 2e_1\zeta + 2e_3\xi + e_1e_3,$$

$$4x^2 - 2x\bar{e}_1 + \bar{e}_2\bar{e}_3 = 4\eta\zeta + 2e_3\eta + 2e_2\zeta + e_2e_3;$$

donc

$$(13) \quad \begin{aligned} 12x^2 - \frac{1}{4}\bar{g}_2 &= -12x^2 + 2g_2 - 2\sum \xi e_1 - \frac{1}{4}g_2; \\ \bar{g}_2 &= 120x^2 - 9g_2. \end{aligned}$$

En outre, nous trouvons facilement

$$8x^3 - \frac{1}{2}\bar{g}_2x + \frac{1}{4}\bar{g}_3 = 8\xi\eta\zeta + 4\sum \xi\eta e_3 + 2\sum \xi e_2 e_3 - \frac{1}{4}g_3.$$

De cette équation, nous trouvons facilement

$$(14) \quad \bar{g}_3 = 312x^3 - 42g_2x - 27g_3.$$

10. *Multiplication complexe.* — En posant

$$\bar{g}_2 = \mu^2 g_2, \quad \bar{g}_3 = \mu^3 g_3,$$

des équations (13) et (14) nous aurons

$$\begin{aligned} (\mu^2 + 9)g_2 &= 120x^2, \\ (\mu^2 + 27)g_3 &= 312x^3 - 42g_2x, \\ (\mu^2 + 9)(\mu^3 + 27)g_3 &= (312\mu^2 - 2232)x^3. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (11) par

$$(\mu^2 + 9)^2 (\mu^3 + 27);$$

nous obtiendrons

$$\mu^7 - 42\mu^5 - 285\mu^4 - 759\mu^3 - 1710\mu^2 - 405 = 0.$$

11. *Réduction du troisième ordre.* — Nous considérons d'abord un exemple, très intéressant, indiqué par Hermite.

On demande de réduire l'intégrale

$$(15) \quad \int \frac{(x-t)dx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^3+3ax+b)}} = u$$

à une intégrale elliptique, t étant une quantité inconnue.

Posons

$$(16) \quad \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + 4a} = 4p(u, g_2, g_3) = \psi(x).$$

De l'équation (16) nous obtiendrons les trois formules suivantes :

$$\frac{x^3 + (\alpha - 4e_1)x^2 + \beta x + \gamma - 16ae_1}{x^2 + 4a} = \frac{(x - \xi)^2 (x - x_1)}{x^2 + 4a} = 4(pu - e_1),$$

$$\frac{x^3 + (\alpha - 4e_2)x^2 + \beta x + \gamma - 16ae_2}{x^2 + 4a} = \frac{(x - \eta)^2 (x - x_2)}{x^2 + 4a} = 4(pu - e_2),$$

$$\frac{x^3 + (\alpha - 4e_3)x^2 + \beta x + \gamma - 16ae_3}{x^2 + 4a} = \frac{(x - \zeta)^2 (x - x_3)}{x^2 + 4a} = 4(pu - e_3),$$

où

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

sont les racines de l'équation

$$x^3 + 3ax + b = 0,$$

et

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad t$$

sont les racines de l'équation

$$\psi'(x) = 0.$$

c'est-à-dire

$$x^4 + (12a - \beta)x^2 + (8ax - 2\gamma)x + 4a\beta = 0;$$

par conséquent

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

satisfont à l'équation

$$(17) \quad x^3 + tx^2 + (t^2 + 12a - \beta)x + t^3 + (12a - \beta)t + 8ax - 2\gamma = 0.$$

De la divisibilité des polynômes

$$\begin{aligned} x^3 + (\alpha - 4e_1)x^2 + \beta x + \gamma - 16ae_1, \\ (x - \xi)^2 = x^2 - 2\xi x + \xi^2, \end{aligned}$$

nous concluons

$$1^\circ \quad 2\xi^3 + (\alpha - 4e_1)\xi^2 - \gamma + 16ae_1 = 0,$$

$$2^\circ \quad 3\xi^2 + 2(\alpha - 4e_1)\xi + \beta = 0,$$

$$3^\circ \quad 2\xi + \alpha - 4e_1 = -x_1.$$

D'où il suit que

$$2\xi x_1 = \beta - \xi^2,$$

de même

$$2\eta x_2 = \beta - \eta^2,$$

$$2\zeta x_3 = \beta - \zeta^2,$$

donc

$$2 \sum \xi x_1 = \beta + t^2 + 24a.$$

De même, nous obtiendrons facilement

$$\begin{aligned}\sum \xi^2 x_1 &= -3\gamma, \\ 2 \sum \xi x_1^2 &= 3\gamma, \\ \sum \xi^2 x^2 &= 4a\beta + 4at^2 + 72a^2.\end{aligned}$$

De l'équation

$$\frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + 4a} - 4e_1 = \frac{(x - \xi)^2 (x - x_1)}{x^2 + 4a},$$

nous aurons

$$\frac{x_1^3 + \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma}{x_1^2 + 4a} - 4e_1 = x_1 + \alpha + 2\xi;$$

d'où

$$(18) \quad \frac{(\beta - 4a)x_1}{x_1^2 + 4a} + \frac{\gamma - 4ax}{x_1^2 + 4a} = 2\xi;$$

par conséquent

$$(\beta - 4a) \sum \frac{x_1}{x_1^2 + 4a} + (\gamma - 4ax) \sum \frac{1}{x_1^2 + 4a} = 2 \sum \xi = -2t.$$

Et comme

$$\sum \frac{x_1}{x_1^2 + 4a} = \frac{9ab}{4a^3 + b^2}, \quad \sum \frac{1}{x_1^2 + 4a} = \frac{9a^2}{4a^3 + b^2},$$

nous obtiendrons

$$\frac{9ab(\beta - 4a)}{4a^3 + b^2} + \frac{9a^2(\gamma - 4ax)}{4a^3 + b^2} = -2t$$

ou

$$(19) \quad 9ab\beta + 9a^2\gamma + (2b^2 - 16a^3)t = 36a^2b.$$

De l'équation (18) nous aurons

$$\beta - 4a - \frac{4a(\beta - 4a)}{x_1^2 + 4a} + \frac{(\gamma - 4ae_1)x_1}{x_1^2 + 4a} = 2\xi x_1.$$

d'où

$$3\beta - 12a - 4a(\beta - 4a) \sum \frac{1}{x_1^2 + 4a} + (\gamma - 4ae_1) \sum \frac{x_1}{x_1^2 + 4a} = 2 \sum \xi x_1$$

ou

$$(20) \quad (2b^2 - 28a^3)\beta + 9ab\gamma - 24a^2bt - (4a^3 + b^2)t^2 = 36ab^2.$$

De l'équation (18) nous aurons encore

$$(\beta - 4a)\xi x_1 + (\gamma - 4ax)\xi = 2\xi^2 x_1^2 + 8a\xi^2;$$

d'où

$$(\beta - 4a)\sum \xi x_1 + (\gamma - 4ax)\sum \xi = 2\sum \xi^2 x_1^2 + 8a\sum \xi^2.$$

D'après les formules trouvées plus haut pour les fonctions symétriques

$$\sum \xi x_1, \quad \sum \xi, \quad \sum \xi^2 x_1^2, \quad \sum \xi^2$$

nous avons

$$(21) \quad \beta^2 - 28x\beta + \beta t + \frac{1}{3}at^2 - 2t\gamma = 0.$$

Des équations (19) et (20) nous trouvons

$$\beta = -\frac{at^2 + 2bt}{7a}, \quad \gamma = \frac{9abt^2 + 4(b^2 + 28a^3)t + 252a^2b}{63a^2}.$$

Par conséquent, l'équation (21) nous donne

$$(22) \quad 9a^2t^4 - (90ab + 63a^2)t^3 + (784 - 126ab - 20b^2)t^2 = 0.$$

On peut, à l'aide de l'équation (18) et des fonctions symétriques, former une autre équation définissant t . En cherchant le plus grand commun diviseur entre cette nouvelle équation et l'équation (22), nous trouverons la valeur t . L'une des solutions de l'équation (22) est

$$t = 0,$$

c'est ce qui donne l'équation réductible

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^3 + 3ax + b)}},$$

indiquée par Hermite et citée par plusieurs autres auteurs.

Nous avons calculé les éléments de la réduction de cette intégrale dans le *Mémoire : Recherche analytique sur la réduction des intégrales abéliennes* (1).

12. Considérons encore un exemple. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{(x + a)dx}{\sqrt{(x + a)(x^3 + 3abx + c)(x + d)}} = u.$$

(1) *Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXVII, juin 1903.

Posons

$$\frac{(x+a)^3}{(x+\beta)^2} = 4(pu - e_1) = \varphi(x).$$

En désignant

$$4(e_1 - e_2) = \sigma,$$

$$4(e_1 - e_3) = \tau,$$

nous aurons

$$1^\circ \quad x^3 + (3a + \sigma)x^2 + (3a^2 + 2\beta\sigma)x + (a^3 + \beta^2\sigma) = x^3 + 2abx + c;$$

$$2^\circ \quad x^3 + (3a + \tau)x^2 + (3a^2 + 2\beta\tau)x + (a^3 + \beta^2\tau) = (x+d)(x+\xi)^2,$$

— ξ étant la racine de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

par conséquent

$$\xi = 3\beta - 2a.$$

Il est facile de prouver que

$$\sigma = -3a, \quad \beta = \frac{a-b}{2},$$

$$4c = a^3 - 3ab^2 + 6a^2b,$$

$$\tau = d - 4a + 3b,$$

$$5a^2 + 2ab - 3b^2 - 8ad - 8bd = 0$$

ou

$$(a+b)(5a-3b-8d) = 0.$$

Il ne peut pas prendre

$$a+b=0,$$

car alors

$$\beta = a, \quad \varphi(x) = x + a,$$

ce qui est impossible; donc

$$8d = 5a - 3b.$$

En outre

$$\sigma + \tau = 12e_1 = -\frac{51a + 27b}{8},$$

$$e_1 = -\frac{17a + 9b}{32}, \quad e_2 = \frac{7a - 9b}{32}, \quad e_3 = \frac{10a}{32}.$$

SUR LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION
DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.
TRANSFORMATION D'UN ORDRE IMPAIR

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXIX, 1905, pp. 203-214)

Dans notre Mémoire *Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et la théorie analytique de la réduction des intégrales abéliennes* ⁽¹⁾, nous avons exposé, entre autres, la théorie algébrique de la transformation du troisième ordre. Cette méthode, appliquée aux transformations des ordres supérieurs, suscite de telles difficultés que, de fait, elle peut être considérée comme impraticable. C'est pourquoi, pour les transformations des ordres supérieurs, il faut employer d'autres principes ne se distinguant de notre méthode primitive qu'en ceci, que dans notre recherche actuelle nous ferons largement usage du théorème de l'addition des arguments. Il faut remarquer que le problème de la transformation est tellement lié avec le problème de la division des périodes elliptiques que dans beaucoup de rapports les deux problèmes coïncident.

Le problème de la division des périodes par 5 et 7 est résolu par Halphen dans son *Traité des fonctions elliptiques* ⁽²⁾. C'est pourquoi, ne nous arrêtant pas aux transformations des ordres 5 et 7, nous étudierons en détail, comme supplément, la transformation du neuvième ordre. La transformation d'un ordre impair

$$2n + 1$$

⁽¹⁾ *Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXVIII, août 1904 ou *Oeuvres Mathématiques*, p. 283.

⁽²⁾ Tome III, 1891, p. 2-98.

se détermine, comme on le sait, par les formules suivantes ⁽¹⁾ :

$$\bar{p}u - \bar{e}_1 = (pu - e_1) \prod_1^n \left[\frac{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega\right)}{pu - p\frac{2k\omega}{2n+1}} \right]^2,$$

$$\bar{p}u - \bar{e}_2 = (pu - e_2) \prod_1^n \left[\frac{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right)}{pu - p\frac{2k\omega}{2n+1}} \right]^2,$$

$$\bar{p}u - \bar{e}_3 = (pu - e_3) \prod_1^n \left[\frac{pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega''\right)}{pu - p\frac{2k\omega}{2n+1}} \right]^2.$$

Soit

$$pu = x,$$

$$\prod_1^n \left(pu - p\frac{2k\omega}{2n+1} \right) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x),$$

$$\prod_1^n \left[pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega\right) \right] = x^n + \xi x^{n-1} + \dots = \psi_1(x),$$

$$\prod_1^n \left[pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right) \right] = x^n + \xi' x^{n-1} + \eta' x^{n-2} + \dots = \psi_2(x),$$

$$\prod_1^n \left[pu - p\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega''\right) \right] = x^n + \xi'' x^{n-1} + \eta'' x^{n-2} + \dots = \psi_3(x).$$

Le problème de la transformation sera résolu si l'on trouve les expressions algébriques des éléments suivants :

$$\begin{array}{cccc} \bar{e}_1, & \bar{e}_2, & \bar{e}_3, & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots, a_n, \\ \xi, & \eta, & \zeta, & \dots, \\ \xi', & \eta', & \zeta', & \dots, \\ \xi'', & \eta'', & \zeta'', & \dots, \end{array}$$

⁽¹⁾ *Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXVII, novembre. — HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. III, p. 245.

De l'égalité

$$\begin{aligned} & \left(pu - p \frac{2\omega}{2n+1} \right) \left(pu - p \frac{4\omega}{2n+1} \right) \\ & \quad \times \dots \times \left(pu - p \frac{2n\omega}{2n+1} \right) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x), \\ & -a_1 = p \frac{2\omega}{2n+1} + p \frac{4\omega}{2n+1} + \dots + p \frac{2n\omega}{2n+1} = \sum_1^n p \frac{2k\omega}{2n+1}. \end{aligned}$$

D'après la formule de l'addition des arguments, nous aurons

$$p \left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega \right) = e_1 + \frac{2e_1^2 + e_2e_3}{p \frac{2k\omega}{2n+1} - e_1},$$

et comme

$$\begin{aligned} & \left[pu - p \left(\frac{2\omega}{2n+1} + \omega \right) \right] \\ & \times \left[pu - p \left(\frac{4\omega}{2n+1} + \omega \right) \right] \\ & \times \dots \times \left[pu - p \left(\frac{2n\omega}{2n+1} + \omega \right) \right] = x^n + \xi x^{n-1} + \dots = \psi_1(x), \end{aligned}$$

alors

$$-\xi = \sum_1^n p \left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega \right),$$

ou

$$-\xi = ne_1 + (2e_1^2 + e_2e_3) \sum \frac{1}{p \frac{2k\omega}{2n+1} - e_1}$$

Remarquant que

$$\sum_1^n \frac{1}{e_1 - p \frac{2k\omega}{2n+1}} = \frac{\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \xi &= -ne_1 + \frac{(2e_1^2 + e_2e_3)\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)}, \\ \xi' &= -ne_2 + \frac{(2e_2^2 + e_1e_3)\varphi'(e_2)}{\varphi(e_2)}, \\ \xi'' &= -ne_3 + \frac{(2e_3^2 + e_1e_2)\varphi'(e_3)}{\varphi(e_3)}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la transformation en question peut être obtenue par la substitution

$$\frac{x^{2n+1} + \alpha x^{2n} + \beta x^{2n-1} + \dots}{(x^n + a_1 x^{n-1} + \dots)^2} = \bar{p}u = \bar{F}(x).$$

Remarquant que

$$\bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x^n + \xi x^{n-1} + \eta x^{n-2} + \dots)^2 (x - e_1)}{(x^n + a_1 x^{n-1} + \dots)^2},$$

nous avons

$$x^{2n+1} + (\alpha - \bar{e}_1)x^{2n} + \dots = x^{2n+1} + (2\xi - e_1)x^{2n} + \dots;$$

d'où

$$\alpha - \bar{e}_1 = 2\xi - e_1.$$

D'une manière semblable

$$\alpha - \bar{e}_2 = 2\xi' - e_2,$$

$$\alpha - \bar{e}_3 = 2\xi'' - e_3;$$

donc

$$3\alpha = 2(\xi + \xi' + \xi'').$$

D'un autre côté, il est évident que les racines des équations

$$x^n + \xi x^{n-1} + \eta x^{n-2} + \dots = 0,$$

$$x^n + \xi' x^{n-1} + \eta' x^{n-2} + \dots = 0,$$

$$x^n + \xi'' x^{n-1} + \eta'' x^{n-2} + \dots = 0$$

satisfont à l'équation

$$F'(x) = 0.$$

Cette dernière équation, le multiplicateur

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

supprimé, se réduit à la forme

$$x^{3n} + 3a_1 x^{2n-1} + \dots = 0;$$

donc

$$\xi + \xi' + \xi'' = 3a_1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 2a_1.$$

Par cette raison

$$(A) \quad \begin{cases} \bar{e}_1 = 2a_1 - 2\xi + e_1, \\ \bar{e}_2 = 2a_1 - 2\xi' + e_2, \\ \bar{e}_3 = 2a_1 - 2\xi'' + e_3, \end{cases}$$

ou autrement

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= 2a_1 + (2n + 1)e_1 - \frac{2(2e_1^2 + e_2e_3)\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)}, \\ \bar{e}_2 &= 2a_1 + (2n + 1)e_2 - \frac{2(2e_2^2 + e_1e_3)\varphi'(e_2)}{\varphi(e_2)}, \\ \bar{e}_3 &= 2a_1 + (2n + 1)e_3 - \frac{2(2e_3^2 + e_1e_2)\varphi'(e_3)}{\varphi(e_3)}.\end{aligned}$$

En additionnant ces équations, nous obtenons

$$(2) \quad \sum_i \frac{(3e_i^2 - \frac{1}{2}g_2)\varphi'(e_i)}{\varphi(e_i)} = 3a_1.$$

La partie gauche de l'équation (2) s'exprime rationnellement par

$$g_2, \quad g_3, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n;$$

donc l'équation (2) exprime pour la transformation d'ordre $2n + 1$ une relation déterminée entre les coefficients

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n$$

de l'équation

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots = \varphi(x) = 0.$$

Nommons les racines de cette équation par

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_n;$$

alors

$$\varphi(e_i) = (e_i - \lambda_1)(e_i - \lambda_2) \dots (e_i - \lambda_n);$$

donc

$$\frac{\varphi'(e_i)}{\varphi(e_i)} = \frac{1}{e_i - \lambda_1} + \frac{1}{e_i - \lambda_2} + \dots + \frac{1}{e_i - \lambda_n}.$$

Si, pour abréger, nous posons

$$x^3 - \frac{1}{4}g_2x - \frac{1}{4}g_3 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = f(x),$$

nous verrons que

$$\begin{aligned}\frac{(2e_1^2 + e_2e_3)\varphi'(e_1)}{\varphi(e_1)} &= \frac{f'(e_1)}{e_1 - \lambda_1} + \frac{f'(e_1)}{e_1 - \lambda_2} + \dots + \frac{f'(e_1)}{e_1 - \lambda_n}, \\ \frac{(2e_2^2 + e_1e_3)\varphi'(e_2)}{\varphi(e_2)} &= \frac{f'(e_2)}{e_2 - \lambda_1} + \frac{f'(e_2)}{e_2 - \lambda_2} + \dots + \frac{f'(e_2)}{e_2 - \lambda_n}, \\ \frac{(2e_3^2 + e_1e_2)\varphi'(e_3)}{\varphi(e_3)} &= \frac{f'(e_3)}{e_3 - \lambda_1} + \frac{f'(e_3)}{e_3 - \lambda_2} + \dots + \frac{f'(e_3)}{e_3 - \lambda_n},\end{aligned}$$

En additionnant ces égalités, nous obtiendrons

$$\sum_1^n \left(\frac{f'(e_1)}{\lambda_k - e_1} + \frac{f'(e_2)}{\lambda_k - e_2} + \frac{f'(e_3)}{\lambda_k - e_3} \right) + 3a_1 = 0.$$

Il est facile de s'assurer de la vérité de la formule suivante

$$\sum_1^n \frac{f'(x_k)}{x - x_k} = \frac{R(x)}{f(x)},$$

où $R(x)$ est le reste qu'on reçoit en divisant $[f'(x)]^2$ par $f(x)$. Par cette raison

$$\frac{f'(e_1)}{\lambda_k - e_1} + \frac{f'(e_2)}{\lambda_k - e_2} + \frac{f'(e_3)}{\lambda_k - e_3} = \frac{\frac{3}{4}g_2\lambda_k^2 + \frac{9}{4}g_3\lambda_k + \frac{1}{16}g_2^2}{\lambda_k^3 - \frac{1}{4}g_2\lambda_k - \frac{1}{4}g_3};$$

donc nous aurons

$$(3) \quad \sum \frac{\frac{3}{4}g_2\lambda_k^2 + \frac{9}{4}g_3\lambda_k + \frac{1}{16}g_2^2}{\lambda_k^3 - \frac{1}{4}g_2\lambda_k - \frac{1}{4}g_3} + 3a_1 = 0.$$

Il faut faire cette remarque essentielle que la formule (3) est une conséquence du théorème de l'addition, Pour nous en convaincre, prenons la transformation

$$\varphi(x) = x^2 + a_1x + a_2.$$

Les racines

$$\lambda, \quad \mu$$

de cette équation seront

$$\lambda = p\left(\frac{2\omega}{5}\right), \quad \mu = p\left(\frac{4\omega}{5}\right).$$

D'après la formule de la duplication de l'argument, nous avons

$$\mu = -2\lambda + \frac{1}{4} \frac{(6\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2)^2}{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3},$$

d'où

$$4(\mu + 2\lambda) = 9\lambda + \frac{\frac{3}{4}g_2\lambda^2 + \frac{9}{4}g_3\lambda + \frac{1}{16}g_2^2}{\lambda^3 - \frac{1}{4}g_2\lambda - \frac{1}{4}g_3},$$

c'est-à-dire

$$4\mu - \lambda = \frac{\frac{3}{4}g_2\lambda^2 + \frac{9}{4}g_3\lambda + \frac{1}{16}g_2^2}{\mu^3 - \frac{1}{4}g_2\mu - \frac{1}{4}g_3}.$$

De la même manière, nous obtenons

$$4\lambda - \mu = \frac{\frac{3}{4}g_2\mu^2 + \frac{9}{4}g_3\mu + \frac{1}{16}g_2^2}{\mu^3 - \frac{1}{4}g_2\mu - \frac{1}{4}g_3};$$

partant

$$\frac{\frac{3}{4}g_2\lambda^2 + \frac{9}{4}g_2\lambda + \frac{1}{16}g_2^2}{\lambda^3 - \frac{1}{4}g_2\lambda - \frac{1}{4}g_3} + \frac{\frac{3}{4}g_2\mu^2 + \frac{9}{4}g_3\mu + \frac{1}{16}g_2^2}{\mu^3 - \frac{1}{4}g_2\mu - \frac{1}{4}g_3} + 3a_1 = 0.$$

Pour la transformation du troisième ordre, nous avons

$$\varphi(x) = x - \alpha, \quad \lambda = \alpha, \quad a_1 = -\alpha.$$

L'équation (3) donne

$$\frac{\frac{3}{4}g_2\alpha^2 + \frac{9}{4}g_3\alpha + \frac{1}{16}g_2^2}{\alpha^3 - \frac{1}{4}g_2\alpha - \frac{1}{4}g_3} - 3\alpha = 0.$$

ou

$$48\alpha^4 - 24g_2\alpha^2 - 48g_3\alpha - g_2^2 = 0.$$

Pour la transformation du cinquième ordre l'application de la formule (3) immédiate donne une équation qui est très compliquée pour les applications. Pour cette transformation, nous avons deux coefficients inconnus

$$a_1, \quad a_2,$$

Pour la transformation du septième ordre, nous avons trois coefficients

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3.$$

Donc, pour l'une de ces transformations il nous faut deux équations, et pour l'autre trois. Ce problème, comme on l'a déjà remarqué, est résolu dans le *Traité* d'Halphen. Ne nous arrêtant pas, pour cette raison, aux transformations des ordres cinquième et septième, passons à la transformation du neuvième ordre, qui nous présente un intérêt particulier par les causes mentionnées plus haut.

Transformation du neuvième ordre. — Pour cette transformation, il faut déterminer les coefficients de l'équation

$$(I) \quad x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\begin{aligned} \lambda &= p\left(\frac{2\omega}{9}\right), & \mu &= p\left(\frac{4\omega}{9}\right), \\ \alpha &= p\left(\frac{2\omega}{3}\right), & \nu &= p\left(\frac{8\omega}{9}\right), \end{aligned}$$

L'une d'elles, la racine α , satisfait à l'équation

$$48\alpha^4 - 24g_2\alpha^2 - 48g_3\alpha - g_2^2 = 0.$$

Prenant α comme une quantité connue, donnons à l'équation (I) la forme

$$(x - \alpha)(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} -a_1 &= \lambda + \mu + \nu, & a_2 &= \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu, & -a_3 &= \lambda\mu\nu, \\ b_1 &= a_1 - \alpha, & b_2 &= a_2 - a_1\alpha, & b_3 &= a_3 - a_2\alpha, & b_4 &= -a_3\alpha; \end{aligned}$$

donc le problème amène à la détermination des trois inconnues

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3.$$

Pour cela, il faut former trois équations. Ces équations seront formées par le théorème de l'addition. Nommons, pour abréger,

$$\frac{2\omega}{9} = a, \quad \frac{4\omega}{9} = b, \quad \frac{6\omega}{9} = \frac{2\omega}{3} = c, \quad \frac{8\omega}{9} = d;$$

nous avons

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} a + b \equiv c, \\ a - b \equiv -a, \end{cases} & (2) \begin{cases} a + c \equiv d, \\ a - c \equiv -b, \end{cases} & (3) \begin{cases} a + d \equiv d, \\ a - d \equiv -c, \end{cases} \\ (4) \begin{cases} b + c \equiv d, \\ b - c \equiv -a, \end{cases} & (5) \begin{cases} b + d \equiv c, \\ b - d \equiv -b, \end{cases} & (6) \begin{cases} c + d \equiv b, \\ c - d \equiv -a. \end{cases} \end{aligned}$$

Appliquant le théorème d'addition au (1) nous obtenons

$$\begin{aligned} 4(\lambda + \mu + \alpha) &= \frac{(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} - \sqrt{4\mu^3 - g_2\mu - g_3})^2}{(\lambda - \mu)^2}, \\ 4(2\lambda + \mu) &= \frac{(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} + \sqrt{4\mu^3 - g_2\mu - g_3})^2}{(\lambda - \mu)^2}. \end{aligned}$$

En additionnant ces équations, nous obtenons

$$4(3\lambda + 2\mu + \alpha)(\lambda - \mu)^2 = 8\lambda^3 + 8\mu^3 - 2g_2(\lambda + \mu) - 4g_3;$$

ou, après des réductions nécessaires,

$$\lambda^3 - 4\lambda^2\mu - \mu^2\lambda - 2\alpha\lambda\mu + \alpha(\mu^2 + \lambda^2) + \frac{1}{2}g_2(\lambda + \mu) + g_3 = 0.$$

En appliquant le théorème d'addition successivement à (5) et après à (3), nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \mu^3 - 4\mu^2\nu - \nu^2\mu - 2\alpha\mu\nu + \alpha(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{2}g_2(\mu + \nu) + g_3 &= 0, \\ \nu^3 - 4\nu^2\lambda - \lambda^2\nu - 2\alpha\lambda\nu + \alpha(\lambda^2 + \nu^2) + \frac{1}{2}g_2(\lambda + \nu) + g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nommons, pour abréger, les fonctions symétriques

$$\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 = \sum \lambda^3, \quad \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + \mu^2\nu + \mu\nu^2 + \lambda^2\nu + \lambda\nu^2 = \sum \lambda^2\mu.$$

En additionnant, après cela, les trois équations ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum \lambda^3 - \sum \lambda^2\mu - 3(\lambda^2\mu + \mu^2\nu + \nu^2\lambda) - 2x \sum \lambda\mu \\ + 2x \sum \lambda^2 + g_2 \sum \lambda + 3g_3 = 0. \end{aligned}$$

Remarquant que

$$\begin{aligned} \sum \lambda^3 &= -a_1^3 - 3a_1a_2 - 3a_3, & \sum \lambda^2 &= a_1^2 - 2a_2, \\ \sum \lambda\mu &= a_2, & \sum \lambda^2\mu &= -a_1a_2 + 3a_3, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$(A) \quad \begin{cases} 3(\lambda^2\mu + \mu^2\nu + \nu^2\lambda) = -a_1^3 + 4a_1a_2 \\ \quad - 6a_3 - 6a_2x + 2a_1^2x - g_2a_1 - 3g_3. \end{cases}$$

En appliquant maintenant à (1) la formule de la duplication de l'argument, nous obtenons

$$4(2\lambda + \mu) = \frac{36\lambda^4 - 6g_2^2\lambda + \frac{1}{4}g_2^2}{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3},$$

ou

$$4\mu(4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3) = 4\lambda^4 + 2g_2\lambda^2 + 8g_3\lambda + \frac{1}{4}g_2^2.$$

De la même manière de (5) et (3) nous obtenons

$$\begin{aligned} 4\nu(4\mu^3 - g_2\mu - g_3) &= 4\mu^4 + 2g_2\mu^2 + 8g_3\mu + \frac{1}{4}g_2^2, \\ 4\lambda(4\nu^3 - g_2\nu - g_3) &= 4\nu^4 + 2g_2\nu^2 + 8g_3\nu + \frac{1}{4}g_2^2. \end{aligned}$$

En additionnant les équations reçues et remarquant que

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \mu^4 + \nu^4 &= a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= a_1^2 - 2a_2, \\ \lambda + \mu + \nu &= -a_1, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} 16(\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda) - 4g_2a_2 + 4g_3a_1 \\ = 4a_1^4 - 16a_1^2a_2 + 16a_1a_3 + 8a_2^2 + 2g_2(a_1^2 - 2a_2) - 8g_3a_1 + \frac{3}{4}g_2^2; \end{aligned}$$

donc

$$(A) \quad \begin{cases} 16(\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda) = 4a_1^4 - 16a_1^2a_2 + 16a_1a_3 \\ \quad + 8a_2^2 + 2g_2a_1^2 - 12g_3a_1 + \frac{3}{4}g_2^2. \end{cases}$$

Puisque

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

sont les racines de l'équation

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

alors

$$\lambda^3\mu = -a_1\lambda^2\mu - a_2\lambda\mu - a_3\mu,$$

$$\mu^3\nu = -a_1\mu^2\nu - a_2\mu\nu - a_3\nu,$$

$$\nu^3\lambda = -a_1\nu^2\lambda - a_2\nu\lambda - a_3\lambda.$$

Posant, pour abréger,

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = H, \quad \lambda^2\mu + \mu^2\nu + \nu^2\lambda = T,$$

nous obtenons

$$H = -a_1T - a_2^2 + a_1a_3.$$

D'après les équations (A) et (B), nous obtiendrons

$$(X) \quad \begin{cases} 4a_1^4 - 16a_1^2a_2 + 96a_1a_3 \\ -72a_2^2 + 10g_2a_1^2 - 12g_3a_1 + 96a_1a_2 - 32a_1^3 - \frac{9}{4}g_2^2 = 0. \end{cases}$$

En appliquant le théorème de l'addition à (2), nous obtenons

$$4(\lambda + \mu + \alpha) = \frac{(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} + \sqrt{4\mu^3 - g_2\mu - g_3})^2}{(\lambda - \alpha)^2},$$

$$4(\lambda + \nu + \alpha) = \frac{(\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3} - \sqrt{4\nu^3 - g_2\nu - g_3})^2}{(\lambda - \alpha)^2},$$

d'où

$$-a_1(\lambda - \alpha)^2 + (\lambda + \alpha)(\lambda - \alpha)^2 = 2\lambda^3 + 2\alpha^3 - \frac{1}{2}g_2(\lambda + \alpha) - g_3;$$

c'est-à-dire

$$(II) \quad -a_1(\lambda^2 - 2\lambda\alpha + \alpha^2) - \lambda\alpha^2 - \alpha\lambda^2 = \lambda^3 + \alpha^3 - \frac{1}{2}g_2(\lambda + \alpha) - g_3.$$

D'une manière semblable, de (4) et (6), nous obtiendrons successivement

$$(III) \quad -a_1(\mu^2 - 2\mu\alpha + \alpha^2) - \mu\alpha^2 - \mu^2\alpha = \mu^3 + \alpha^3 - \frac{1}{2}g_2(\mu + \alpha) - g_3.$$

$$(IV) \quad -a_1(\nu^2 - 2\nu\alpha + \alpha^2) - \nu\alpha^2 - \nu^2\alpha = \nu^3 + \alpha^3 - \frac{1}{2}g_2(\nu + \alpha) - g_3.$$

En additionnant (II), (III), (IV), nous aurons

$$(Y) \quad 3a_3 = 3\alpha^3 + 2a_1\alpha^2 + 3a_1^2\alpha - 2a_2\alpha - \frac{3}{2}g_2\alpha - a_1a_2 - \frac{1}{2}g_2a_1 - 3g_3.$$

Soustrayant maintenant (II) et (III) et éliminant le facteur $(\lambda - \mu)$, nous obtenons

$$-a_1(\lambda + \mu) + 2a_1x - x^2 - x(\lambda + \mu) = \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 - \frac{1}{2}g_2.$$

De la même manière

$$-a_1(\lambda + \nu) + 2a_1x - x^2 - x(\lambda + \nu) = \lambda^2 + \lambda\nu + \nu^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$-a_1(\mu + \nu) + 2a_1x - x^2 - x(\mu + \nu) = \mu^2 + \mu\nu + \nu^2 - \frac{1}{2}g_2.$$

Les trois dernières équations donnent

$$(Z) \quad 3a_2 = 3x^2 - 8a_1x - \frac{3}{2}g_2.$$

Des équations (Y) et (Z) nous obtenons

$$9a_3 = 3x^3 + 25a_1x^2 + a_1^2x - \frac{3}{2}g_2x - 3g_2a_1 - 9g_3 = 0.$$

Mettant maintenant dans l'équation (X) à la place de a_2 et a_3 , les quantités obtenues, nous recevrons finalement

$$12a_1^4 + 64xa_1^3 - 1552x^2a_1^2 - 42g_2a_1^2 + 1536x^3a_1 - 768g_2xa_1 - 324g_3a_1 - 216x^4 + 216g_2x^2 - \frac{243}{4}g_2^2 = 0.$$

REMARQUES SUR LA THÉORIE
DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS
ELLIPTIQUES
ET SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES
ABÉLIENNES

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXX, 1906, pp. 207-224)

I

Soit l'intégrale elliptique

$$(1) \quad \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = u; \quad x = p(u, g_2, g_3).$$

Il faut satisfaire à l'équation

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2y - \bar{g}_3}}$$

au moyen de la substitution

$$(2) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = y = \bar{p}(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3);$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions entières des degrés i, k ; g_2, g_3 sont des invariants donnés; $\bar{g}_2, \bar{g}_3$ les invariants inconnus. Il suit de l'équation (1) qu'au voisinage de $x = \infty$ nous avons un développement de x suivant les puissances de u avec la partie principale u^{-2} . De l'équation (2) on voit qu'aux environs de $x = \infty$ on a un développement de x avec la partie principale $u^{-\frac{2}{i-k}}$; par conséquent,

$$i - k = 1.$$

En posant

$$i = 2n,$$

nous avons

$$k = 2n - 1,$$

et nous avons une transformation de degré pair $2n$.

Posons

$$\varphi(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k}.$$

Alors de l'équation

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_j)^{\alpha_j} \dots (x - x_k)^{\alpha_k}} = \bar{p}(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3)$$

on voit qu'au voisinage de

$$x - x_j = 0$$

nous avons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale

$$u^{\frac{2}{\alpha_j}}.$$

Et, comme x est une fonction monodrome de u pour toutes les valeurs de x , nous avons nécessairement

$$\alpha_j = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha_j = 2.$$

Il est évident que, si $\alpha_j = 1$, x_j est un point de ramification, par conséquent

$$x_j = e_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

En remarquant que $\varphi(x)$ est un polynôme de degré impair, on ne peut admettre que deux hypothèses

- (1) $\varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_i),$
- (2) $\varphi(x) = (x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1) (x - e_2) (x - e_3).$

La première hypothèse donne lieu à une transformation qui est définie par les trois formules suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)}, \\ p u - e_3 = \frac{(x - \xi''_1)^2 (x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_n)^2}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-1})^2 (x - e_1)}, \end{cases}$$

La seconde transformation donne lieu aux trois formules suivantes :

$$(B) \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_1 = \frac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 \dots (x - \xi_n)^2}{(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1) (x - e_2) (x - e_3)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_2 = \frac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2 \dots (x - \xi'_n)^2}{(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1) (x - e_2) (x - e_3)}, \\ \bar{p}u - \bar{e}_3 = \frac{(x - \xi''_1)^2 (x - \xi''_2)^2 \dots (x - \xi''_n)^2}{(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-2})^2 (x - e_1) (x - e_2) (x - e_3)}, \end{cases}$$

Le principal but du travail présent est l'étude de la transformation (B). Pourtant la méthode que nous allons développer est aussi facilement applicable à la transformation (A) ; ce que nous allons montrer dans la suite.

En posant

$$x_1 = p^{x_1}, \quad x_2 = p^{x_2}, \quad \dots, \quad x_{n-2} = p^{x_{n-2}},$$

il est évident que

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{p}u &= \lambda p u + \mu + \frac{A_1}{p u - e_1} + \frac{A_2}{p u - e_2} + \frac{A_3}{p u - e_3} \\ &+ \frac{B_1}{(p u - p^{x_1})^2} + \frac{B'_1}{p u - p^{x_1}} \\ &+ \frac{B_2}{(p u - p^{x_2})^2} + \frac{B'_2}{p u - p^{x_2}} \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \frac{B_{n-2}}{(p u - p^{x_{n-2}})^2} + \frac{B'_{n-2}}{p u - p^{x_{n-2}}}, \end{aligned} \right.$$

où

$$\lambda, \mu, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, \dots, B'_1, B'_2$$

sont des coefficients inconnus.

En développant les deux membres de l'équation (3) aux environs de $u = 0$, nous avons

$$(4) \quad u^{-2} + \frac{1}{20} \bar{g}_2 u^2 + \frac{1}{28} \bar{g}_3 u^4 + \dots = \mu + \lambda(u^{-2} + \frac{1}{20} g_2 u^2 + \dots) + u^2 F(u),$$

$F(u)$ est une fonction holomorphe satisfaisant à la condition

$$F(0) \neq 0.$$

On voit de l'équation (4) que

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0,$$

Il suit des équations (B) que

$$\bar{p}(u) = \infty$$

pour

$$x = e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{n-2};$$

par conséquent,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_{n-2}, \quad \dots, \quad \omega, \quad \omega'$$

sont des périodes de la fonction $\bar{p}u$. Posons maintenant dans l'équation (3)

$$u = \omega + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0;$$

alors nous aurons

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} + \frac{1}{20} \bar{g}_2 \varepsilon^2 + \frac{1}{28} \bar{g}_3 \varepsilon^4 + \dots \\ &= e_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega + \frac{1}{24} \varepsilon^4 p^{iv} \omega + \dots + \frac{A_1}{\frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega + \frac{1}{24} \varepsilon^4 p^{iv} \omega + \dots} \\ & \quad + \frac{A_2}{e_1 - e_2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega + \dots} + \frac{A_3}{e_1 - e_3 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega + \dots} \\ & \quad + \frac{B_1}{(e_1 - p x_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega + \dots)^2} + \frac{B'_1}{e_1 - p x_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega + \dots} \\ & \quad + \dots \\ & \quad + \frac{B_{n-2}}{(e_1 - p x_{n-2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega)^2} + \frac{B'_{n-2}}{e_1 - p x_{n-2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 p'' \omega}. \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\frac{2A_1}{p'' \omega} = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2} p'' \omega = 3e_1^2 - \frac{1}{4} g_2.$$

De même nous trouvons

$$A_2 = 3e_2^2 - \frac{1}{4} g_2, \quad A_3 = 3e_3^2 - \frac{1}{4} g_2.$$

Posant pour abrégier

$$(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3) = x^3 - \frac{1}{4} g_2 x - \frac{1}{4} g_3 = f(x),$$

$$x = p\alpha$$

et remarquant que

$$3e_i^2 - \frac{1}{4} g_2 = f'(e_i),$$

il est évident que

$$\frac{A_1}{pu - e_1} + \frac{A_2}{pu - e_2} + \frac{A_3}{pu - e_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{3e_i^2 - \frac{1}{4} g_2}{pu - e_i} = \frac{R(x)}{f(x)},$$

où $R(x)$ est le reste de la division de

$$(f'x)^2 = 9x^4 - \frac{3}{2} g_2 x^2 + \frac{1}{16} g_2^2$$

par

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{4}g_2x - \frac{1}{4}g_3,$$

c'est-à-dire

$$R(x) = \frac{3}{2}g_2p^2u + \frac{9}{4}g_3pu + \frac{1}{16}g_2^2.$$

Par conséquent,

$$pu + \sum_1^3 \frac{3e_i^2 - \frac{1}{4}g_2}{pu - e_i} = \frac{p^4u + \frac{1}{2}g_2p^3u + 2g_3pu + \frac{1}{16}g_2^2}{p^3u - \frac{1}{4}g_2pu - \frac{1}{4}g_3},$$

ou

$$pu + \sum_1^3 \frac{3e_i^2 - \frac{1}{4}g_2}{pu - e_i} = 4p(2u);$$

donc

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{p}(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3) &= 4p^2u + \frac{B_1}{(pu - p\alpha_1)^2} + \frac{B'_1}{pu - p\alpha_1} + \dots \\ &+ \frac{B_i}{(pu - p\alpha_i)^2} + \frac{B'_i}{pu - p\alpha_i} + \dots \\ &+ \frac{B_{n-2}}{(pu - p\alpha_{n-2})^2} + \frac{B'_{n-2}}{pu - p\alpha_{n-2}}. \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer les coefficients

$$B_i, \quad B'_i$$

prenons, dans l'équation (5)

$$u = \alpha_i + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0.$$

Alors on peut développer les deux membres de l'équation (5) en série suivant les puissances de ε . Pour avoir ce développement, remarquons que

$$pu - p\alpha_i = \varepsilon p'\alpha_i + \frac{1}{2}\varepsilon^2 p''\alpha_i + \frac{1}{6}\varepsilon^3 p'''\alpha_i + \dots;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{pu - p\alpha_i} &= \frac{p'\alpha_i}{p'\alpha_i} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{p''\alpha_i}{p'\alpha_i} \varepsilon + \left(\frac{1}{4} \frac{p''^2\alpha_i}{p'^2\alpha_i} - \frac{1}{6} \frac{p'''\alpha_i}{p'\alpha_i} \right) \varepsilon^2 + \dots \right], \\ \frac{1}{(pu - p\alpha_i)^2} &= \frac{\varepsilon^{-2}}{p'^2\alpha_i} \left[1 - \frac{p''\alpha_i}{p'\alpha_i} \varepsilon + \left(\frac{3}{4} \frac{p''^2\alpha_i}{p'^2\alpha_i} - \frac{1}{3} \frac{p'''\alpha_i}{p'\alpha_i} \right) \varepsilon^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Pour cette raison l'équation (5) nous donne

$$\frac{B_i}{p'^2\alpha_i} = 1,$$

d'où

$$B_i = p'^2 \alpha_i,$$

$$\frac{B_i p'' \alpha_i}{p'^3 \alpha_i} - \frac{p'_i}{p' \alpha_i} = 0,$$

d'où

$$B'_i = p'' \alpha_i.$$

Par conséquent,

$$\bar{p}u = 4p^2u + \sum \left(\frac{p'^2 \alpha_i}{(pu - p\alpha_i)^2} + \frac{p'' \alpha_i}{pu - p\alpha_i} \right).$$

Et, comme

$$\frac{p'^2 \alpha_i}{(pu - p\alpha_i)^2} + \frac{p'' \alpha_i}{pu - p\alpha_i} = p(u + \alpha_i) + p(u - \alpha_i) - 2p\alpha_i \quad (1),$$

nous avons définitivement

$$(6) \quad \bar{p}(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3) = 4p^2u + \sum [p(u + \alpha_i) + p(u - \alpha_i) - 2p\alpha_i].$$

Pour la transformation du quatrième ordre nous avons

$$\bar{p}(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3) = 4p^2u.$$

Cette transformation est indiquée dans notre Mémoire *De quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques* (2). On s'assure très facilement que ces transformations d'un degré supérieur au quatre sont impossibles. Bornons-nous à démontrer l'impossibilité de la transformation du sixième ordre. En effet, dans ce cas nous avons

$$\bar{p}u = 4p^2u + p(u + \alpha) + p(u - \alpha) - 2p\alpha,$$

α étant un argument inconnu. En posant

$$u = \alpha + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0,$$

développant les deux membres en série et égalant à zéro le terme constant, nous avons

$$4p^2\alpha + p^2\alpha - 2p\alpha = 0,$$

ou

$$(7) \quad -3p^4\alpha + \frac{9}{2}g_2p^2\alpha + 12g_3p\alpha + \frac{9}{16}g_2^2 = 0.$$

(1) HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 205.

(2) *Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXVII, novembre 1903.

En posant

$$u = \omega + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0$$

nous avons

$$p(\omega - \alpha) = px,$$

ou

$$e_1 + \frac{3e_1^2 - \frac{1}{4}g_2}{px - e_1} = px,$$

ou

$$p^2x - 2e_1px - 2e_1^2 + \frac{1}{4}g_2 = 0,$$

Et comme nous devons avoir en même temps

$$p^2x - 2e_2px - 2e_2^2 + \frac{1}{4}g_2 = 0,$$

$$p^2x - 2e_3px - 2e_3^2 + \frac{1}{4}g_2 = 0,$$

alors

$$(8) \quad 3p^2x - \frac{1}{4}g_2 = 0.$$

En éliminant $p(x)$ des (7) et (8), nous trouvons

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0,$$

ce qui est impossible.

En ce qui concerne la transformation (A), on voit qu'à $\bar{p}u$ on peut donner la forme suivante :

$$\bar{p}u = pu + \frac{A}{pu - e_1} + \sum \left(\frac{B_i}{(pu - px_i)^2} + \frac{B'_i}{pu - px_i} \right),$$

où l'argument x_i satisfait à l'équation

$$x_i = px_i.$$

Il est facile de démontrer que

$$A = \frac{1}{2}p''\omega, \quad B_i = p'^2x_i, \quad B'_i = p''\sigma_i.$$

Par conséquent,

$$\bar{p}u = pu + \frac{3e_1^2 - \frac{1}{4}g_2}{pu - e_1} + \sum_1^{n-1} [p(u + \sigma_i) + p(u - \sigma_i) - 2px_i].$$

ou

$$\bar{p}u = pu + p(u + \omega) - p\omega + \sum_1^{n-1} [p(u + \sigma_i) + p(u - \sigma_i) - 2px_i].$$

En remarquant que

$$\sigma_i = \frac{2i\omega}{2n} = \frac{i\omega}{n},$$

nous avons définitivement

$$\bar{p}u = pu + p(u + \omega) - p(\omega) + \sum \left[p\left(u + \frac{i\omega}{n}\right) + p\left(u - \frac{i\omega}{n}\right) - 2p\frac{i\omega}{n} \right].$$

De la même manière pour la transformation d'un ordre impair $(2n + 1)$ nous obtiendrons

$$\bar{p}u = pu + \sum \left[p\left(u + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) + p\left(u - \frac{2k\omega}{2n+1}\right) - 2p\frac{2k\omega}{2n+1} \right].$$

Ces formules sont mentionnées dans le mémoire de M. L. Kiepert : *Zur Theorie der elliptischen Functionen* ⁽¹⁾.

II

La réduction des intégrales abéliennes. — La méthode exposée dans le paragraphe précédent est d'un usage très simple pour la résolution du problème de la réduction des intégrales abéliennes. Soit donnée l'intégrale hyperelliptique de la première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + \dots + A_{2n-1}}} = u,$$

Faisons pour abréger

$$x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + \dots + A_{2n+1} = \varphi(x)$$

Aux environs de $x = \infty$ nous avons un développement de x avec la partie principale

$$\left(\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2}{2n-1}} u^{-\frac{2}{2n-1}}.$$

Si l'intégrale u est réductible à l'aide de la substitution

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3)$$

rationnelle, le degré de numérateur surpasse celui de dénominateur par $(2n - 1)$. Si l'on pose

$$\lambda = \left(\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2}{2n-1}},$$

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, t. XXVI., p. 384.

nous avons

$$F(x) = x^i + \dots, \quad f(x) = x^{i+2n-1} + \dots,$$

Posant

$$F(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_i)^{\alpha_i},$$

on voit que pu devient infini pour

$$x = x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_i.$$

Au voisinage d'un de ces points x_k nous avons un développement de $(x - x_k)$ avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{\alpha_k}}.$$

Et, comme x est une fonction monodrome de l'argument u pour toutes les valeurs de x sauf $x = \infty$, sont possibles les deux hypothèses suivantes :

$$1^\circ \quad \alpha_k = 1,$$

$$2^\circ \quad \alpha_k = 2.$$

Si $\alpha_k = 1$, alors x_k est un point de ramification. Considérons seulement le cas où

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_i,$$

tous sont les points de ramification et où alors $F(x)$ est un diviseur du polynôme (x) . Dans ce cas nous avons

$$(9) \quad \begin{cases} F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \dots (x - x_i), \\ \lambda pu = x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x + \alpha_{2n-1} \\ \quad + \frac{\beta_1}{x - x_1} + \frac{\beta_2}{x - x_2} + \dots + \frac{\beta_i}{x - x_i}, \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i \end{cases}$$

sont des coefficients inconnus. En remarquant que

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{\varphi(x)},$$

nous avons

$$(10) \quad \begin{cases} \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \varphi(x), \\ \frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{2}\varphi'(x), \\ \frac{d^3x}{du^3} = \frac{1}{2}\varphi''(x)\frac{dx}{du}, \\ \frac{d^4x}{du^4} = \frac{1}{2}\varphi'''(x)\varphi(x) + \frac{1}{4}\varphi''(x)\varphi'(x), \\ \dots \end{cases}$$

L'équation (9) montre que pu devient infini pour

$$x = x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_i.$$

En posant que

$$u = u_k;$$

pour

$$x = x_k$$

nous voyons que u_k est une période de la fonction pu . En faisant

$$u = u_k + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0,$$

nous aurons

$$pu = \varepsilon^{-2} + \frac{1}{2^0} g_2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2^8} g_3 \varepsilon^4 + \dots;$$

$$x - x_k = \varepsilon \left(\frac{dx}{du} \right)_k + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{d^2x}{du^2} \right)_k + \frac{1}{6} \varepsilon^3 \left(\frac{d^3x}{du^3} \right)_k + \frac{1}{24} \varepsilon^4 \left(\frac{d^4x}{du^4} \right)_k + \dots;$$

ou

$$x - x_k = \frac{1}{4} \varepsilon^2 \varphi'(x_k) + \frac{1}{96} \varepsilon^4 \varphi'(x_k) \varphi''(x_k) + \dots$$

Par cette raison

$$x - x_k = \frac{1}{4} \varepsilon^2 \varphi'(x_k) [1 + \frac{1}{24} \varepsilon^2 \varphi''(x_k) + \dots],$$

$$\frac{\beta_k}{x - x_k} = \frac{4\beta_k \varepsilon^{-2}}{\varphi'(x_k)} [1 - \frac{1}{24} \varepsilon^2 \varphi''(x_k) + \dots].$$

Maintenant faisons dans l'équation (9) $u = u_k + \varepsilon$, $\lim \varepsilon = 0$; nous aurons

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{-2} + \frac{1}{2^0} g_2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2^8} g_3 \varepsilon^4 + \dots) \\ &= \frac{4\beta_k}{\varphi'(x_k)} \varepsilon^{-2} + \left(x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x_k + \alpha_{2n-1} \right. \\ & \quad + \frac{\beta_1}{x_k - x_1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \\ & \quad + \frac{\beta_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{\beta_i}{x_k - x_i} \\ & \quad \left. - \frac{1}{6} \frac{\beta_k}{\varphi'(x_k)} \varphi''(x_k) \right) + \dots \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\beta_k = \frac{\lambda \varphi'(x_k)}{4}, \quad k = 1, 2, \dots, i,$$

$$\begin{aligned} & x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x_k + \alpha_{2n-1} \\ & + \frac{\beta_1}{x_k - x_1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \\ & + \frac{\beta_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{\beta_i}{x_k - x_i} - \frac{1}{24} \lambda \varphi''(x_k) = 0. \end{aligned}$$

ou

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x_k + \alpha_{2n-1} \\ & + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\varphi'(x_1)}{x_k - x_1} + \dots + \frac{\varphi'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right. \\ & \left. + \frac{\varphi'(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{\varphi'(x_i)}{x_k - x_i} - \frac{1}{6} \varphi''(x_k) \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est facile de trouver la somme

$$\sum_1^{2n-1} \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k}.$$

Posant

$$\frac{\varphi'(x_1)}{x - x_1} + \dots + \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k} + \dots + \frac{\varphi'(x_i)}{x - x_i} = \frac{\xi(x)}{F(x)},$$

nous devons avoir

$$\varphi'(x_k) = \frac{\xi(x_k)}{F'(x_k)},$$

d'où

$$\xi(x_k) = \varphi'(x_k) F'(x_k).$$

d'où

$$\xi(x_k) = \varphi'(x_k) F'(x_k).$$

D'où il suit que $\xi(x)$ est le reste de la division de

$$\varphi'(x) F'(x)$$

par $F(x)$; donc

$$(12) \quad \varphi'(x) F'(x) = F(x) Q(x) + \xi(x),$$

$Q(x)$ étant un polynôme.

Et comme

$$\lambda p u = x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x + \alpha_{2n-1} + \frac{\lambda}{4} \sum_1^{2n} \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k},$$

nous avons

$$(13) \quad \lambda p u = x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x + \alpha_{2n-1} + \frac{\lambda}{4} \frac{\xi(x)}{F(x)}.$$

En outre

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi'(x_1)}{x_k - x_1} + \dots + \frac{\varphi'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \\ & + \frac{\varphi'(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{\varphi'(x_i)}{x_k - x_i} = \frac{\xi(x_k)}{F'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{\varphi'(x_k)}{F'(x_k)} F''(x_k). \end{aligned}$$

De l'équation (11), nous avons

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x_k + \alpha_{2n-1} \\ & + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\xi'(x_k)}{F'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{\varphi'(x_k)}{F'(x_k)} F''(x_k) - \frac{1}{6} \varphi''(x_k) \right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

De l'équation

$$\varphi(x) = F(x)\psi(x),$$

où $\psi(x)$ est le polynôme donné, nous avons

$$(15) \quad \frac{\varphi'(x_k)}{F'(x_k)} = \psi(x_k).$$

De l'équation (12), on voit que

$$(16) \quad \frac{\xi(x_k)}{F'(x_k)} = \varphi''(x_k) + F''(x_k)\psi(x_k) - Q(x_k).$$

En substituant dans (14) les valeurs (15) et (16) nous aurons

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_k^{2n-1} + \alpha_1 x_k^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x_k + \alpha_{2n-1} \\ & + \frac{\lambda}{24} [5\varphi''(x_k) + 3\psi(x_k)F''(x_k) - 6Q(x_k)] \end{aligned} \right\} = 0.$$

L'équation (17) donne lieu à trois cas possibles.

Premier cas. — Soit $i > 2n - 1$. En remarquant que le degré du polynôme

$$5\varphi''(x) + 3\psi(x)F''(x) - 6Q(x)$$

est $(2n - 1)$, nous voyons que l'équation

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x + \alpha_{2n-1} \\ & + \frac{\lambda}{24} [5\varphi''x + 3\psi(x)F''x - 6Qx] \end{aligned} \right\} = 0$$

du degré $2n - 1$ aura $i > 2n - 1$ racines; ce qui est impossible. Donc la réduction dans ce cas n'est pas possible.

Deuxième cas. — Soit $i = 2n - 1$. Dans ce cas le polynôme (18) ne diffère du polynôme Fx que par le facteur constant

$$l = 1 + \frac{1}{6} \lambda (2n^2 - 2n + 3).$$

C'est pourquoi la réduction se fait d'après la formule

$$(19) \quad \lambda p u = l F(x) - \frac{\lambda}{24} [5\varphi''x + 3\psi(x)F''(x) - 6Q(x)] + \frac{\lambda}{4} \frac{\xi(x)}{F(x)}.$$

Cette équation (19) n'a point de coefficients inconnus.

Troisième cas. — Soit $i < 2n - 1$. Dans ce cas, le polynôme (18) est divisible par $F(x)$, et nous avons

$$x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2} x + \alpha_{2n-1} \\ + \frac{\lambda}{24} [5\varphi''(x) + 3\psi(x)F''(x) - 6Q(x)] = lF(x)\theta(x),$$

où

$$\theta(x) = x^{2n-i-1} + c_1 x^{2n-i-2} + \dots + c_{2n-i-1}, \\ c_1, \quad c^2, \quad \dots, \quad c_{2n-i-1}$$

sont des coefficients indéterminés. Nous avons évidemment

$$\lambda pu = lF(x)\theta(x) - \frac{\lambda}{24} [5\varphi''(x) + 3\psi(x)F''(x) - 6Q(x)] + \frac{\lambda}{4} \frac{\xi(x)}{F(x)}.$$

En outre,

$$\lambda pu = \frac{f(x)}{F(x)},$$

par conséquent $f(x)$ n'aura que $2n - i - 1$ coefficients indéterminés

$c_1,$	$c_2,$	$\dots,$	$c_{2n-i-1}.$
Désignant	$2\omega_1,$	$2\omega_2,$	$2\omega_3$

les périodes de la fonction pu et posant

$$u = \omega + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0,$$

nous avons

$$\lambda(\frac{1}{2}\varepsilon^2 p''\omega + \frac{1}{24}\varepsilon^4 p^{IV}\omega + \dots) = \frac{f(x) - \lambda e_1 F(x)}{F(x)}.$$

Il est clair que le polynôme

$$f(x) - \lambda e_1 F(x)$$

ne peut avoir que des facteurs doubles ou linéaires. Ces derniers doivent être les diviseurs de $\psi(x)$: donc

$$f(x) - \lambda e_1 F(x) = \psi_1(x)P_1^2 x.$$

De même

$$f(x) - \lambda e_2 F(x) = \psi_2(x)P_2^2 x,$$

$$f(x) - \lambda e_3 F(x) = \psi_3(x)P_3^2 x,$$

$$\psi_1(x)\psi_2(x)\psi_3(x) = \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)}.$$

D'où il suit que le produit

$$(20) \quad [f(x) - \lambda e_1 F(x)] [f(x) - \lambda e_2 F(x)] [f(x) - \lambda e_3 F(x)]$$

doit être divisible par le polynôme $\psi(x)$ dont le degré est égal à

$$2n - i + 1.$$

En égalant identiquement à zéro le reste de la division de (20) par $\psi(x)$, nous obtiendrons

$$2n - i + 1$$

équations linéaires aux inconnues

$$c_1, \quad c_2, \quad \dots, \quad c_{2n-i-1}, \quad e_1, \quad e_2.$$

III

Considérons maintenant les intégrales de la forme

$$(21) \quad \int \frac{(x-t)dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = u.$$

Aux environs de $x = \infty$, nous avons un développement de x avec la partie principale

$$\left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\frac{2}{2n-3}} u^{-\frac{2}{2n-3}},$$

$$\varphi(x) = x^{2n+1} + p_1 x^{2n} + \dots + p_{2n} x + p_{2n+1};$$

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{2n+1}$$

sont les racines du polynôme $\varphi(x)$. Posons

$$\lambda p u = \frac{f(x)}{F(x)},$$

où le degré de $F(x)$ est égal à i ; le degré de $f(x)$ sera alors

$$i + 2n - 3;$$

$$\lambda = \left(\frac{2n-3}{2}\right)^{\frac{-2}{2n-3}}.$$

Ne considérons que le cas le plus simple, où $F(x)$ est un diviseur du polynôme $\varphi(x)$; nous avons alors

$$\varphi(x) = F(x)\psi(x).$$

Soit

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i).$$

Posons

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda p u &= x^{2n-3} + \alpha_1 x^{2n-4} + \dots + \alpha_{2n-4} x + \alpha_{2n-3} \\ &+ \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_k}{x-x_k} + \dots + \frac{A_i}{x-x_i}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (21) nous donne

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \varphi(x) (x-t)^{-2}.$$

$$2 \frac{d^2 x}{du^2} = \varphi'(x) (x-t)^{-2} - 2\varphi(x) (x-t)^{-3},$$

$$2 \frac{d^3 x}{du^3} = [\varphi''(x) (x-t)^{-2} - 4\varphi'(x) (x-t)^{-3} + 6\varphi(x) (x-t)^{-4}] \frac{dx}{du},$$

$$\begin{aligned} 4 \frac{d^4 x}{du^4} &= [\varphi''(x) (x-t)^{-2} - 4\varphi'(x) (x-t)^{-3} + 6\varphi(x) (x-t)^{-4}] \\ &\times [\varphi'(x) (x-t)^{-2} - 2\varphi(x) (x-t)^{-3}] \\ &+ [\varphi'''(x) (x-t)^{-2} - 6\varphi''(x) (x-t)^{-3} + 18\varphi'(x) (x-t)^{-4} \\ &\quad - 24\varphi(x) (x-t)^{-5}] \left(\frac{dx}{du}\right)^2. \end{aligned}$$

Si, pour $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots, 2n+1$, nous avons

$$u = u_k;$$

alors u_k est une période de la fonction pu . Au voisinage de $u = u_k$, nous aurons le développement

$$x = x_k + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 x}{du^2}\right)_k + \frac{1}{24} \varepsilon^4 \left(\frac{d^4 x}{du^4}\right)_k + \dots,$$

ou

$$\begin{aligned} x - x_k &= \frac{1}{4} \varepsilon^2 \varphi'(x_k - t)^{-2} \\ &+ \frac{1}{96} \varepsilon^4 [\varphi''(x_k) (x_k - t)^{-2} - 4\varphi'(x_k) (x_k - t)^{-3}] \varphi'(x_k) (x_k - t)^{-2} + \dots \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{A_k}{x - x_k} = \frac{4A_k \varepsilon^{-2} (x_k - t)^2}{\varphi'(x_k)} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \varepsilon^2 [\varphi''(x_k) (x_k - t)^{-2} - 4\varphi'(x_k) (x_k - t)^{-3}] \dots \right\}.$$

Faisons maintenant dans l'équation (22)

$$u = u_k + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0;$$

alors

$$pn = p(u_k + \varepsilon) = p\varepsilon = \varepsilon^{-2} + \frac{1}{20} g_2 \varepsilon^2 + \frac{1}{28} g_3 \varepsilon^4 + \dots$$

Par conséquent,

$$\lambda(\varepsilon^{-2} + \frac{1}{20} g_2 \varepsilon^2 + \frac{1}{28} g_3 \varepsilon^4 + \dots) = \frac{4A_k(x_k - t)^2}{\varphi'(x_k)} \varepsilon^{-2} + \dots$$

D'où il suit que

$$A_k = \frac{\lambda \varphi'(x_k)}{4(x_k - t)^2};$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, i.$$

Par cette raison

$$\begin{aligned} \lambda p u &= x^{2n-3} + \alpha_1 x^{2n-4} + \dots + \alpha_{2n-4} x + \alpha_{2n-3} \\ &+ \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\varphi'(x_1)}{(x_1 - t)^2 (x - x_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi'(x_2)}{(x_2 - t)^2 (x - x_2)} + \dots + \frac{\varphi'(x_i)}{(x_i - t)^2 (x - x_i)} \right). \end{aligned}$$

Nous avons, évidemment,

$$\frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)(x - x_k)} = \frac{\varphi'(x_k)}{x - t} \left(\frac{1}{x_k - t} + \frac{1}{x - x_k} \right).$$

Par conséquent,

$$\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)(x - x_k)} = \frac{1}{x - t} \sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k} - \frac{1}{x - t} \sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{t - x_k}.$$

Et comme

$$\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{x - x_k} = \frac{R(x)}{F(x)},$$

$$\sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{t - x_k} = \frac{R(t)}{F(t)},$$

où

$$Rx = \varphi'(x)F'(x) - F(x)Q(x).$$

nous avons

$$\begin{aligned} \sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)(x - x_k)} &= \frac{1}{x - t} \left(\frac{R(x)}{F(x)} - \frac{R(t)}{F(t)} \right), \\ \sum_1^i \frac{\varphi'(x_k)}{(x_k - t)^2 (x - x_k)} &= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{R(x)}{F(x)} - \frac{R(t)}{F(t)} \right) (x - t)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda p u &= x^{2n-3} + \alpha_1 x^{2n-4} + \dots + \alpha_{2n-3} \\ &+ \frac{\lambda}{4} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{R(x)}{F(x)} - \frac{R(t)}{F(t)} \right) (x - t)^{-1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Exemple. — Soit l'intégrale réductible ⁽¹⁾

$$\int \frac{(x-t)dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+2abx+a^2b)}};$$

trouver la valeur de t . Posons

$$\lambda pu = \frac{f(x)}{x+a}.$$

Nous avons

$$\lambda = \left(\frac{2n-3}{2} \right)^{\frac{-2}{2n-3}} = 4,$$

$$\varphi(x) = (x+a)(x^4+bx^2+2abx+a^2b), \quad F'(x) = 1;$$

$$\varphi'xF'(x) = 5x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 + 6abx + 3a^2b,$$

$$R(x) = R(t) = a^4.$$

D'après la formule (23), nous avons

$$\lambda pu = x + \alpha_1 + \frac{\lambda}{4} \frac{a^4}{(x+a)(t+a)^2}.$$

Aux environs du point

$$x - t = 0,$$

nous avons un développement $(x-t)$ suivant les puissances de $(u-u_1)$ avec la partie principale

$$(u-u_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, dans l'égalité

$$\begin{aligned} & \lambda[pu_1 + (u-u_1)p'u_1 + \frac{1}{2}(u-u_1)^2p''u_1 + \dots] \\ &= \left(\alpha_1 + t + \frac{\lambda a^4}{4(t+a)^3} \right) + \left(1 - \frac{\lambda a^4}{4(t+a)^4} \right) (x-t) + \dots, \end{aligned}$$

nous devons avoir

$$\begin{aligned} p'u_1 &\neq 0, \\ 1 - \frac{\lambda a^4}{4(t+a)^4} &= 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (t+a)^4 &= a^4; \\ t &= 0, \quad t = -2a. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XXVIII, août 1904.

**QUELQUES NOUVELLES REMARQUES
SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS
ELLIPTIQUES ET SUR LA RÉDUCTION
DES INTÉGRALES ABÉLIENNES**

(*Bull. des Sciences math.*, 2^e série, t. XXXI, 1907, pp. 217-31)

1. Considérons l'intégrale elliptique

$$(1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6x_2x^2 + 4x_3x + x_4}} = u.$$

Posant

$$\sqrt{x^4 + 6x_2x^2 + 4x_3x + x_4} = x^2 + \lambda + \frac{\mu}{y},$$

λ, μ étant des coefficients arbitraires, nous aurons une équation biquadratique

$$(2) \quad [(6x_2 - 2\lambda)x^2 + 4x_3x + (x_4 - \lambda^2)]y^2 - 2\mu(x^2 + \lambda)y - \mu^2 = 0.$$

A cette équation, on peut donner la forme

$$(3) \quad \begin{cases} f(x, y) = [(6x_2 - 2\lambda)y^2 - 2\mu y]x^2 \\ \quad + 4x_3y^2x + [(x_4 - \lambda^2)y^2 - 2\lambda\mu y - \mu^2] = 0. \end{cases}$$

La discriminante de l'équation (2) sera

$$\Delta_x = x^4 + 6x_2x^2 + 4x_3x + x_4,$$

et la discriminante de (3) sera

$$\Delta_y = 2x_3^2y^4 - [(3x_2 - \lambda)y^2 - \mu y][(x_4 - \lambda^2)y^2 - 2\lambda\mu y - \mu^2].$$

Puisque les coefficients λ et μ sont arbitraires, la courbe

$$f(x, y) = 0$$

n'a pas de points multiples, comme aussi les discriminantes Δ_x et Δ_y n'ont pas de racines égales.

Nommons les racines de l'équation

$$\Delta_x = 0$$

par

$$\xi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Chacune de ces racines étant substituée dans l'équation (2) au lieu de x rend $f(x, y)$ un carré parfait. Donc nous aurons simultanément

$$f(\xi_k, y) = 0, \quad \frac{\partial f(\xi_k, y)}{\partial y} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

L'équation

$$\Delta_y = 0$$

donne pour y quatre valeurs différentes

$$\eta_k \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

qui sont de telle sorte que chacune d'elles étant substituée au lieu de y dans l'équation (3) rend $f(x, y)$ un carré parfait. Donc nous aurons simultanément

$$f(x, \eta_k) = 0, \quad \frac{\partial f(x, \eta_k)}{\partial x} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

De l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

nous obtenons

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} = 0.$$

On voit de l'équation (1) que

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{x^4 + 6x_2x^2 + 4x_3x + a_4} = \sqrt{\Delta_x}$$

a seulement quatre zéros :

$$x = \xi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Ayant cela en vue, faisons dans l'équation (4)

$$x = \xi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Alors nous aurons évidemment

$$\frac{\partial f(\xi_k, y)}{\partial y} \frac{dy}{du} = 0.$$

Mais de ce qui est dit précédemment, on voit que, pour

$$x = \xi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

nous aurons simultanément

$$f(x_k, y) = 0, \quad \frac{\partial f(\xi_k, y)}{\partial y} = 0.$$

Donc les droites

$$x = \xi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

seront tangentes à la courbe

$$f(x, y) = 0$$

aux points

$$x = \xi_k, \quad y = Y_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Il est facile à prouver que

$$\frac{dY_k}{du} \neq 0,$$

parce que, en cas contraire, la courbe donnée aurait un point double, c'est-à-dire que nous aurions

$$\frac{\partial f(\xi_k, Y_k)}{\partial Y_k} = 0, \quad \frac{\partial f(\xi_k, Y_k)}{\partial \xi_k} = 0.$$

Posant dans l'équation (4)

$$y = r_k \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

nous obtenons

$$\frac{\partial f(x, r_k)}{\partial r_k} \frac{dr_k}{du} = 0.$$

On ne peut pas supposer que

$$\frac{\partial f(x, r_k)}{\partial r_k} = 0,$$

parce que

$$\frac{\partial f(x, r_k)}{\partial x} = 0,$$

et il faut conclure que

$$\frac{dr_k}{du} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

La dérivée $\frac{dy}{du}$ ne devient pas zéro dans toutes les autres valeurs de y . Donc $\frac{dy}{du}$ a seulement quatre zéros :

$$y = r_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Donc

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{\Delta_y},$$

et

$$\frac{dx}{\sqrt{\Delta_x}} = A \frac{dy}{\sqrt{\Delta_y}},$$

où A est une constante.

2. Cette transformation des intégrales elliptiques joue un rôle considérable dans la théorie des intégrales pseudo-elliptiques ⁽¹⁾.

A l'aide d'elle on peut parvenir très facilement à la formule connue de l'inversion des intégrales elliptiques. Posant

$$\sqrt{x^4 + 6x_2x^2 + 4x_3x + \alpha_4} = x^2 + \sigma_2 - 2z,$$

nous obtenons

$$4(\sigma_2 + z)x^2 + 4x_3x - (4z^2 - 4\sigma_2z + \sigma_2^2 - \alpha_4) = 0.$$

On voit d'ici que

$$\begin{aligned} \Delta_x &= x^4 + 6x_2x^2 + 4x_3x + \alpha_4, \\ \Delta_z &= 4z^3 - (3x_2^2 + \sigma_4)z - (\alpha_2x_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2), \\ g_2 &= 3x_2^2 + \alpha_4, \quad g_3 = \alpha_2x_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2. \end{aligned}$$

3. Montrons maintenant l'application de la propriété indiquée de la discriminante de l'équation de transformation à la recherche des conditions de la réduction des intégrales hyperelliptiques

$$\int \frac{\mathcal{F}(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

de la première espèce, où $R(x)$ est un polynôme d'un degré plus élevé que la quatrième, $\mathcal{F}(x)$ une fonction entière avec des coefficients indéterminés qui doivent être choisis de manière que l'inté-

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. VI, 1890.

grale se réduise à une intégrale elliptique lorsqu'il y a quelque relation algébrique entre les coefficients du polynôme $R(x)$. Comme premier exemple, prenons l'intégrale

$$(5) \quad \int \frac{(x+t)dx}{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}} = u.$$

Il faut choisir t de telle sorte que l'intégrale se réduise à une intégrale elliptique. Mettons

$$\frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x} = y,$$

ou

$$(6) \quad f(x, y) = x^2 + (\alpha - y)x + \beta = 0.$$

Supposons que $\frac{dy}{du} = 0$ pour

$$y = e_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

De l'équation (6), nous obtenons

$$(7) \quad (2x + \alpha - y) \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du} = 0,$$

où

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}}{x + t}.$$

Il est évident que $\frac{dx}{du} = 0$ pour $x = 0$ et pour

$$(8) \quad x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4 = 0.$$

Nommons les racines de l'équation (8) par

$$x_1, x_2, x_3, x_4.$$

Faisant dans l'équation (7)

$$y = e_1,$$

nous devons obtenir pour x deux valeurs satisfaisant à l'équation

$$(2x + \alpha - e_1) \frac{dx}{du} = 0.$$

Posons dans cette équation

$$\frac{dx}{du} = 0;$$

alors nous devons avoir

$$x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta = (x - x_1)(x - x_2).$$

Faisant dans l'équation (7)

$$y = e_2,$$

nous devons obtenir pour x deux valeurs satisfaisant à l'équation

$$(2x + \alpha - e_2) \frac{dx}{du} = 0.$$

Posons dans cette équation

$$\frac{dx}{du} = 0;$$

alors nous devons avoir

$$x^2 + (\alpha - e_2)x + \beta = (x - x_2)(x - x_3).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} [x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta][x^2 + (\alpha - e_2)x + \beta] \\ = x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2\alpha + e_3 &= -4a, \\ 2\beta + \alpha^2 + \alpha e_3 + e_1 e_2 &= 6a^2 + b, \\ 2\alpha\beta + \beta e_3 &= -4a^3, \\ \beta^2 &= a^4. \end{aligned}$$

De ces équations, on trouve

$$\begin{aligned} e_3 &= -(4a + 2\alpha), \\ \beta &= a^2, \\ e_1 &= 2a + \alpha + \sqrt{-b}, \\ e_2 &= 2a + \alpha - \sqrt{-b}. \end{aligned}$$

La discriminante de l'équation (6) sera

$$\Delta_y = (\alpha - y)^2 - 4\beta = (\alpha - y)^2 - 4a^2.$$

Nommant les racines de l'équation

$$\Delta_y = 0$$

par

$$y = r_1, \quad y = r_2,$$

faisons dans l'équation (7) $y = r_1$; nous aurons

$$2x - r_1 + \alpha = 0$$

et

$$\frac{dr_1}{du} = 0;$$

donc

$$r_1 = e_3.$$

Résolvant l'équation

$$\Delta_y = 0,$$

nous obtenons

$$y = \alpha \pm 2a.$$

C'est-à-dire pour e_3 nous recevons deux solutions :

$$1^\circ \quad e_3 = \alpha + 2a,$$

$$2^\circ \quad e_3 = \alpha - 2a,$$

et comme

$$e_3 = -4a - 2\alpha,$$

pour r_2 nous obtenons deux solutions :

$$r_2 = -4a, \quad r_2 = \frac{4}{3}a.$$

Faisons maintenant

$$y = r_2;$$

alors dans l'équation (7) sera

$$2x + \alpha - r_2 = 0,$$

$$x \frac{dr_2}{du} \neq 0,$$

et alors il est indispensable que

$$\frac{dx}{du} = \infty, \quad x \neq \infty.$$

Mais de l'équation (5)

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}}{x + t}.$$

On voit que

$$\frac{dx}{du} = \infty$$

lorsque

$$x + t = 0.$$

Donc

$$-2t + \alpha - \eta_2 = 0.$$

Ainsi pour t nous obtenons deux solutions :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & t = a, \\ 2^\circ & t = -a, \end{array}$$

et deux intégrales réduites :

$$\int \frac{(x+a)dx}{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}},$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{\sqrt{x[x^4 - 4ax^3 + (6a^2 + b)x^2 - 4a^3x + a^4]}}.$$

4. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{(x-t)(x-s)dx}{\sqrt{x(x^3 + px^2 + qx + r)(x^3 + kx^2 + lx + m)}} = u.$$

On se propose de déterminer t et s avec la condition que, lorsque entre les coefficients

$$p, q, r, k, l, m$$

il existe de certaines relations algébriques, l'intégrale u se réduit en une intégrale elliptique. En se servant de la substitution du troisième degré de Jacobi

$$(9) \quad \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x - \varepsilon)^2} = y,$$

et posant que

$$\frac{dy}{du} = 0$$

lorsque

$$y = e_1, e_2, e_3 \quad (e_1 + e_2 + e_3 = 0),$$

nous obtenons

$$\begin{array}{ll} (a) & x^3 + (\alpha - e_1)x^2 + (\beta + 2e_1\varepsilon)x + \gamma - e_1\varepsilon^2 = x^3 + px^2 + qx + r, \\ (b) & x^3 + (\alpha - e_2)x^2 + (\beta + 2e_2\varepsilon)x + \gamma - e_2\varepsilon^2 = x^3 + kx^2 + lx + m, \\ (c) & x^3 + (\alpha - e_3)x^2 + (\beta + 2e_3\varepsilon)x + \gamma - e_3\varepsilon^2 = x(x - \xi)^2, \end{array}$$

où ξ est certainement une quantité inconnue. Dès ces équations nous avons

$$\begin{aligned} \alpha - e_1 &= p, & \beta + 2e_1\varepsilon &= q, & \gamma - e_1\varepsilon^2 &= r, \\ \alpha - e_2 &= k, & \beta + 2e_2\varepsilon &= l, & \gamma - e_2\varepsilon^2 &= m, \\ \gamma - e_3\varepsilon^2 &= 0, & (\alpha - e_3)^2 &= 4\beta + 8e_3\varepsilon, & \xi &= \frac{e_3 - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m(k + 2p) - r(p + 2k)}{3(m - r)}, \\ \beta &= \frac{m(l + 2p) - r(p + 2k)}{3(m - r)}, \\ \gamma &= \frac{m + r}{3}, \quad \varepsilon = \frac{q - l}{2(k - p)}, \\ e_1 &= \frac{(k - p)(m - 2r)}{3(m - r)}, \quad e_2 = \frac{(k - p)(r - 2m)}{3(m - r)}, \quad e_3 = \frac{(k - p)(r + m)}{3(m - r)}, \end{aligned}$$

Outre cela il est facile à voir qu'entre les coefficients

$$p, q, r; k, l, m$$

il existe une relation

$$(q - l)^2 = 4(m - r)(k - p).$$

La discriminante de l'équation (9) sera

$$\begin{aligned} -27\Delta_y &= [2(\alpha - y)^3 - 9(\alpha - y)(\beta + 2\varepsilon y) + 27(\gamma - \varepsilon^2 y)]^2 \\ &\quad + 4[3(\beta + 2\varepsilon y) - (\alpha - y)^2]^3. \end{aligned}$$

On voit facilement que Δ_y est un polynôme du troisième degré ; nommons les racines de ce polynôme par

$$r_1, r_2, r_3.$$

En donnant à l'équation (9) la forme

$$f(x, y) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma - (x - \varepsilon)^2 y = 0$$

et la différentiant, nous obtenons

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} = 0.$$

Des recherches ci-dessus, on voit qu'en posant

$$y = e_1, y = e_2,$$

nous recevons

$$\frac{dy}{du} = 0, \quad \frac{dx}{du} = 0.$$

La supposition

$$y = e_3$$

donne pour x trois valeurs : la première $x = 0$ qui correspond à l'équation

$$\frac{dx}{du} = 0$$

et les deux autres qui donnent simultanément

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Donc

$$y = e_3$$

est une des racines de la discriminante Δ_y ; posons

$$e_3 = \eta_1.$$

Prenons maintenant dans l'équation (10) successivement

$$y = \eta_2, \quad y = \eta_3;$$

on voit que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Mais avec ces valeurs de y ni $\frac{dy}{du}$, ni $\frac{dx}{du}$ ne se convertissent en zéro ; donc il faut que

$$\frac{dx}{du} = \infty,$$

ce qui peut être en prenant

$$x = t, \quad x = s.$$

Donc

$$f(x, \eta_2) = (x - t)^2 (x - \xi_2),$$

$$f(x, \eta_3) = (x - s)^2 (x - \xi_3).$$

Ayant en vue que les racines de l'équation

$$\Delta_y = 0$$

sont

$$y = e_3, \quad y = \eta_1, \quad y = \eta_2,$$

divisons Δ_y par $y - e_3$. En égalant à zéro le reste Λ_{e_3} de cette division, nous recevrons encore une nouvelle condition algébrique

$$\Delta_{e_3} = 0$$

à laquelle doivent satisfaire les coefficients

$$p, q, r; k, l, m.$$

Le quotient de la division sera un polynôme du second degré, et il sera facile d'en trouver les racines

$$\eta_2, \eta_3.$$

En substituant η_2, η_3 à la place de y dans l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

nous calculerons les racines doubles des équations $f(x, \eta_2) = 0$, $f(x, \eta_3) = 0$.

Ces racines seront, évidemment,

$$x = t, \quad x = s,$$

et le problème de la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{(x - t)(x - s)dx}{\sqrt{x(x^3 + px^2 + qx + r)(x^3 + kx^2 + lx + m)}}$$

à une intégrale elliptique sera résolu à l'aide d'opérations algébriques définies.

5. Maintenant nous voulons montrer qu'en cherchant les conditions de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques, il n'est pas nécessaire de rapporter la réduction à telle ou telle forme canonique de l'intégrale elliptique. Dans chaque cas particulier, on peut toujours déterminer à quelle forme d'intégrales elliptiques on peut réduire l'intégrale abélienne, et cela de la manière la plus facile.

Prenons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2 + b)^2 (x^2 + 3gx + h)}} = u,$$

et trouvons les conditions de sa réduction à l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y - e_1)^2 (y - e_2)^2 (y - e_3)^2}} = u \quad (e_1 + e_2 + e_3 = 0)$$

au moyen de la substitution la plus simple :

$$(11) \quad \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + \gamma} = y,$$

ou

$$(2) \quad x^2 + \alpha x + \beta - (x + \gamma)y = f(x, y) = 0.$$

De l'équation (12), nous avons

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} = 0.$$

En se rappelant que

$$\frac{dx}{du} = 0$$

pour

$$y = e_1, e_2, e_3,$$

faisons dans l'équation (13)

$$y = e_1.$$

Alors nous devons avoir ou

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{du} = 0.$$

Pour reconnaître laquelle de ces deux suppositions a lieu, remarquons que la partie principale dans le développement de $(y - e_1)$ aura la forme

$$\lambda(u - v)^3,$$

v étant une constante. Donc

$$\frac{x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta - \gamma e_1}{x + \gamma} = \lambda(u - v)^3 + \dots$$

Portant

$$x^2 + (\alpha - e_1)x + \beta - \gamma e_1 = x^2 + b, \quad \frac{dx}{du} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\alpha - e_1 = 0, \quad \beta - \gamma e_1 = b.$$

Faisant

$$y = e_2, e_3,$$

nous devons avoir

$$\frac{x^2 + (\alpha - e_i)x + \beta - \gamma e_i}{x + \gamma} = \mu_i(u - v_i)^3 + \dots \quad (i = 2, 3).$$

D'où nous obtenons

$$(14) \quad \begin{cases} x^2 + (\alpha - e_2)x + (\beta - \gamma e_2) = (x - x_1)^2, \\ x^2 + (\alpha - e_3)x + (\beta - \gamma e_3) = (x - x_2)^2, \end{cases}$$

où x_1, x_2 sont les racines de l'équation

$$x^2 + 3gx + h = 0.$$

Outre cela, d'après les équations (14), on voit que

$$f(x, e_i) = 0, \quad \frac{\partial f(x, e_i)}{\partial x} = 0 \quad (i = 2, 3);$$

donc

$$y = e_2, e_3$$

sont les racines de la discriminante de l'équation (12); c'est-à-dire e_2, e_3 satisfont à l'équation

$$y^2 + (4\gamma - 2\alpha)y + \alpha^2 - 4\beta = 0.$$

L'expression (14) donne

$$\begin{aligned} x^4 + (2\alpha + e_1)x^3 + (2\beta + \gamma e_1 + \alpha^2 + \alpha e_1 + e_2 e_3)x^2 \\ + (2\alpha\beta + \alpha\gamma e_1 + \beta e_1 + 2\gamma e_2 e_3)x + (\beta^2 + \beta\gamma e_1 + \gamma^2 e_2 e_3) \\ = x^4 + 6gx^3 + (9g^2 + 2h)x^2 + 6ghx + h^2. \end{aligned}$$

De toutes ces équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha &= e_1, & \beta + \alpha\gamma &= b, \\ \alpha &= 2g, & 4\gamma - 2\alpha &= e_1, & \alpha^2 - 4\beta &= e_2 e_3, \\ \gamma &= \frac{3}{2}g, & \beta &= 3g^2 - h, \\ b &= 6g^2 - h, \\ e_1 &= 2g, & e_2 &= -g + \sqrt{9g^2 - 4h}, & e_3 &= -g - \sqrt{9g^2 - 4h}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 6g^2 - h)^2 (x^2 + 3gx + h)}} \\ = \int \frac{dy}{\sqrt[3]{[y^3 + (4h - 12g^2)y + (16g^3 - 8gh)]^2}}.$$

6. Prenons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 2ax + b)^3 (x + c)^2}} = u,$$

et trouvons les conditions de la réduction de cette intégrale à une intégrale elliptique à l'aide d'une substitution de Jacobi, la plus simple possible. Donnons à l'intégrale réduite la forme

$$\int \frac{dy}{\sqrt[4]{(y - e_1)^3 (y - e_2)^3}} \quad (e_1 + e_2 = 0).$$

Posant

$$x^2 + 2ax + b = \frac{1}{4}y,$$

et remarquant que

$$y - e_i = \lambda(u - v_i)^4 + \dots \quad (i = 1, 2),$$

v_i étant une constante, nous devons obtenir

$$x^2 + 2ax + b - \frac{1}{4}e_1 = x^2 + 2ax + b.$$

D'où

$$a = a, \quad b - \frac{1}{4}e_1 = b.$$

De la même manière

$$x^2 + 2ax + b - \frac{1}{4}e_2 = (x + c)^2,$$

D'où

$$a = c = a, \quad b - \frac{1}{4}e_2 = c^2 = a^2, \\ b = \frac{a^2 + b}{2}, \quad e_1 = 2(a^2 - b).$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 2ax + b)^3 (x + a)^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt[4]{[y^2 - 4(a^2 - b)^2]^3}}.$$



THE HISTORY OF THE

REIGN OF

CHARLES THE FIRST

BY

JOHN BURNET

OF THE UNIVERSITY OF OXFORD

IN TWO VOLUMES

THE SECOND

PART

OF

THE HISTORY

OF

THE

REIGN

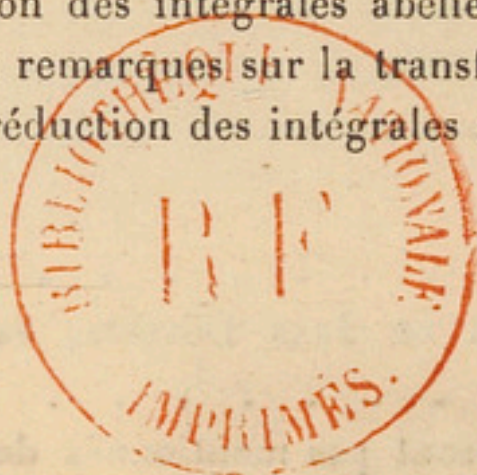
OF

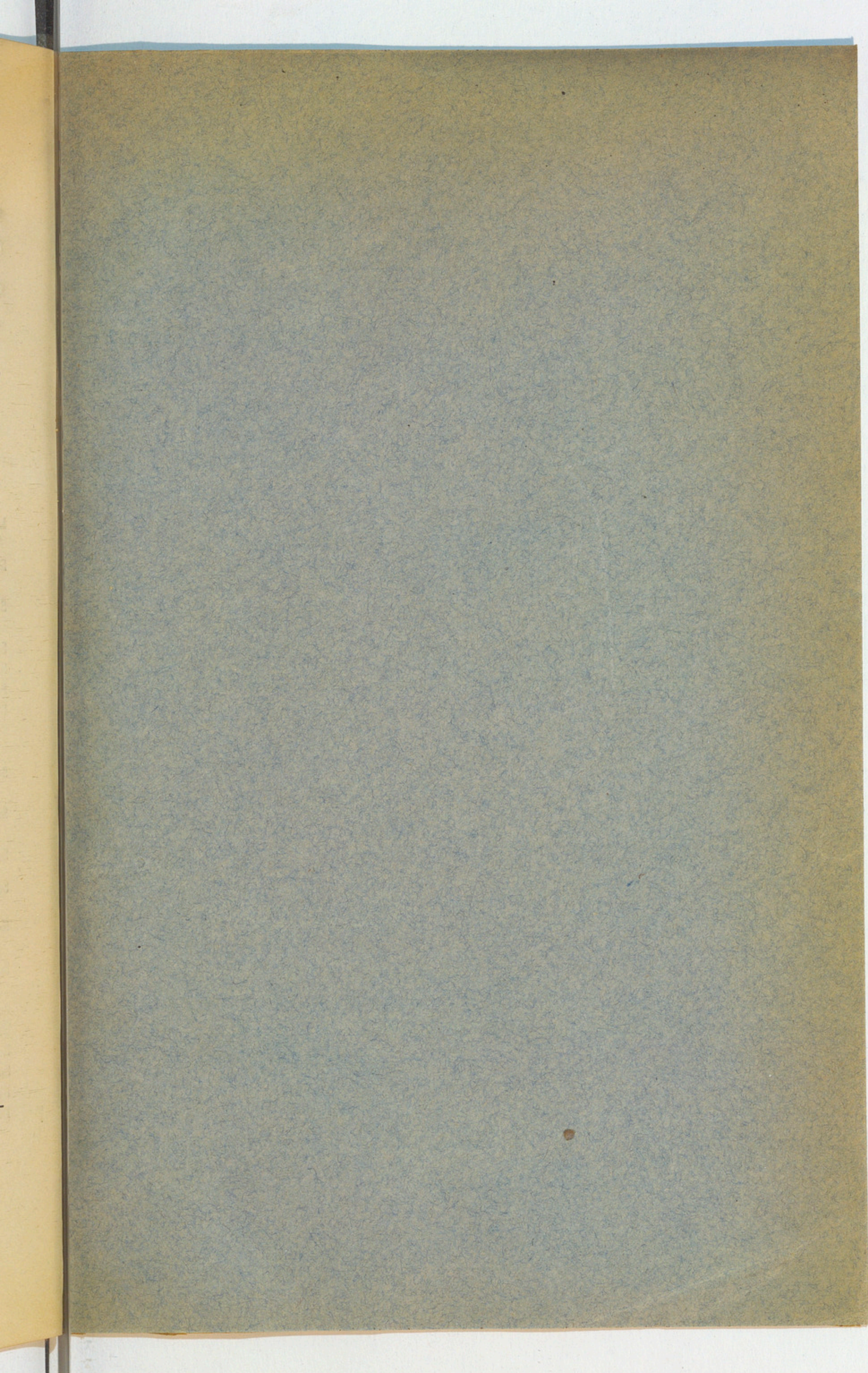
CHARLES THE FIRST

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PRÉFACE DE M. G. DARBOUX	I
NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE JEAN DOLBRIA, PAR NICOLAS KRYLOFF	III
Liste des Travaux de Dolbria qui ne sont pas mentionnés dans la présente édition	XIII
Sur le critère de Galois concernant la résolubilité des équations algébriques par radicaux.	I
Sur l'addition des intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce	17
Sur l'analogie entre les fonctions elliptiques et trigonométriques	25
Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel	36
Sur le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue.	54
Remarques sur la théorie des fonctions abéliennes	60
Sur les intégrales pseudo-elliptiques qui dépendent d'une racine cubique d'un polynôme du troisième degré	81
Sur les intégrales pseudo-elliptiques dépendant des radicaux du quatrième et sixième degré.	96
Sur la forme plus précise des racines des équations algébriques résolubles par radicaux	105
Sur la résolution algébrique des équations de degré premier.	118
Sur l'intégrale $\int \frac{dX}{\sqrt{X^4 + pX^2 + q}}$	124
Sur la détermination du genre d'une certaine catégorie d'intégrales abéliennes et quelques applications	133
Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binôme	143
Remarque sur le genre des intégrales abéliennes	173
Étude directe des intégrales abéliennes du genre un	175
Remarques sur l'inversion des intégrales elliptiques	210
Sur un cas de réductibilité des intégrales abéliennes.	213
Recherche analytique sur la réduction des intégrales abéliennes.	216
De quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques	233

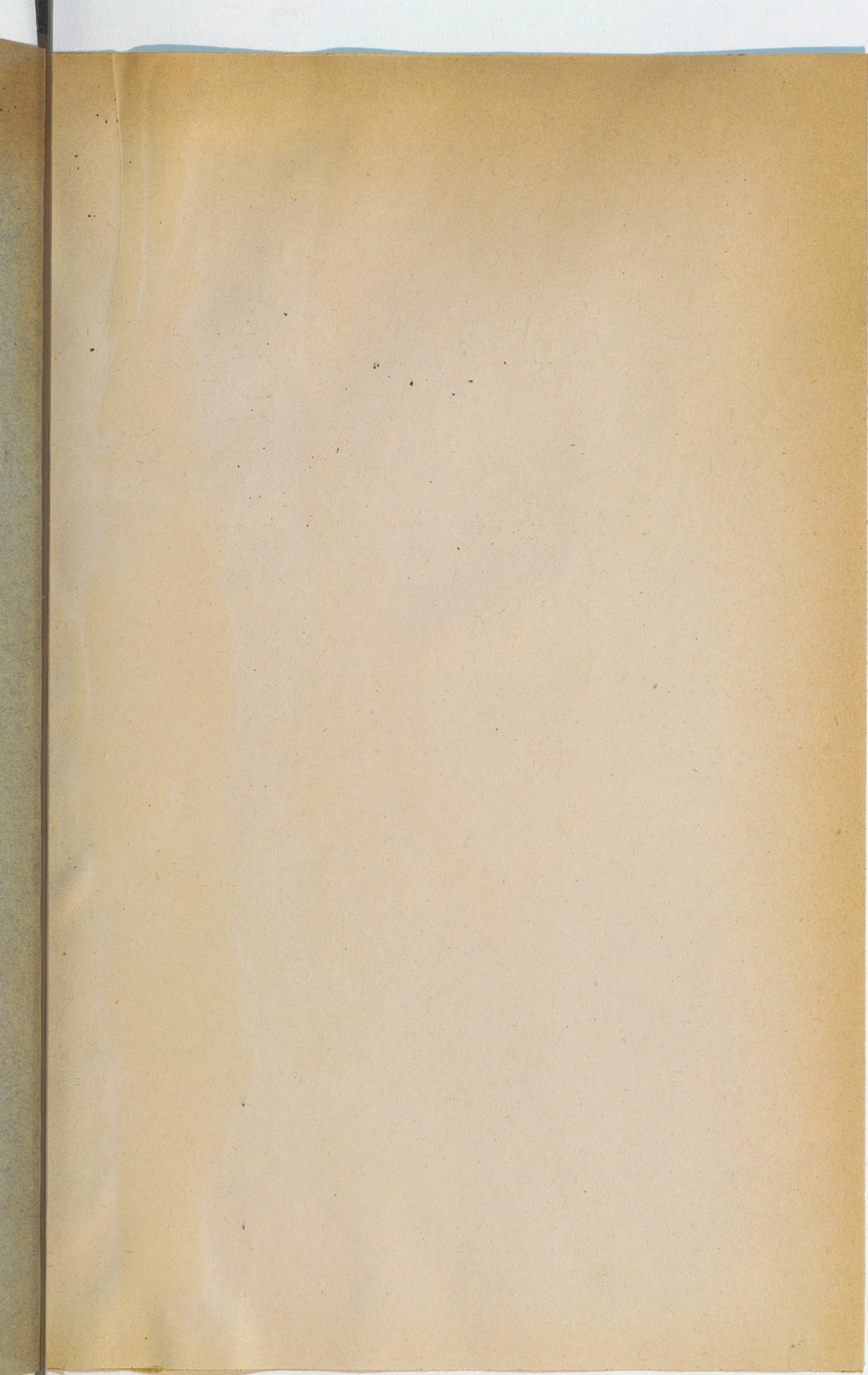
	Pages
Recherche analytique sur la réduction des intégrales abéliennes de seconde espèce	256
Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et la théorie analytique de la réduction des intégrales abéliennes.	283
Sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Transformation d'un ordre impair	304
Remarques sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des intégrales abéliennes	315
Quelques nouvelles remarques sur la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des intégrales abéliennes	332

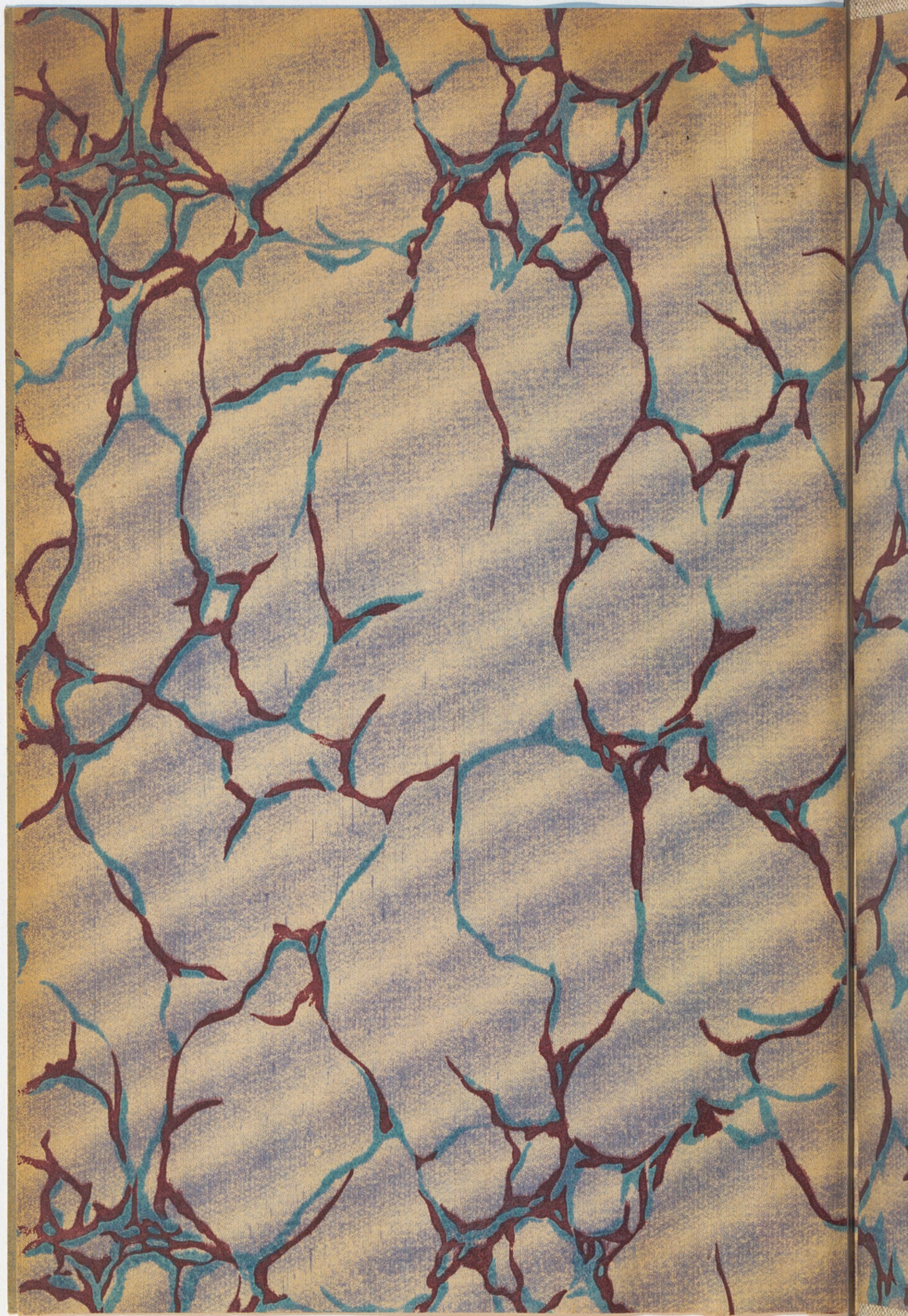


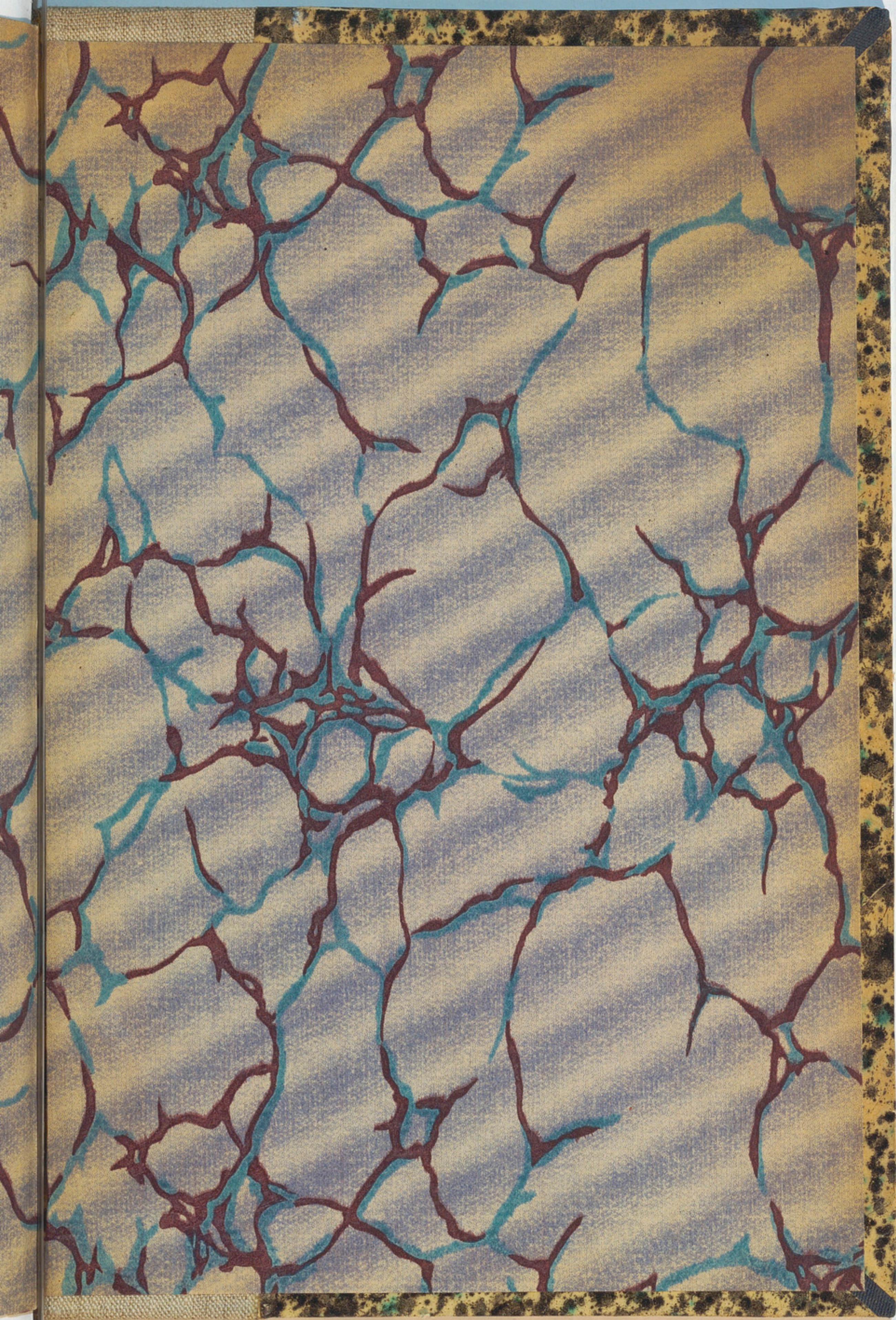


Extrait du Catalogue des publications de la Librairie Scientifique
A. HERMANN ET FILS

- CHWOLSON (O. D.).** — Traité de physique (voir prospectus spécial).
- CHWOLSON (O. D.).** — Traité de Physique. Tome IV, Fascicule 2. Champ magnétique constant 22 fr. »
- KÖENIGS (G.).** — Leçons de cinématique théorique, avec notes de MM. DARBOUX et COSSERAT. Grand in-8°, 500 pages, 1897 15 fr. »
- GOURSAT (E.).** — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. 2 volumes grand in-8°, 1896-98 18 fr. »
- TANNERY (J.).** — Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable. 2^e édition en 2 volumes. Tome 1^{er}, 1904 14 fr. »
Tome II, 1911, avec note de J. HADAMARD. 15 fr. »
- MACH (E.).** — La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Trad. sur la 4^e édition par ED. BERTRAND, avec introduction de EM. PICARD. 500 pages avec fig. et portrait, 1904. 15 fr. »
- ROUSE BALL (W.).** — Histoire des mathématiques. Traduction FREUND. 2 volumes grand in-8°, 1906-1908 20 fr. »
- ROUSE BALL.** — Récréations mathématiques, 2^e édit. 3 vol. 15 fr. »
- FABRY (E.).** — Traité de Mathématiques générales, avec préface de M. DARBOUX, 1912 9 fr. »
- BJERKNES** (Traduction HOUEL). — Niels-Henrik Abel. Grand in-8°, 380 pages avec portrait. 6 fr. »
- DUHEM (P.).** — Les origines de la statique, 2 vol. 20 fr. »
- DUHEM (P.).** — Etudes sur Léonard de Vinci. 3 vol. 47 fr. »
- GOURSAT (E.).** — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 14 fr. »
- KLEIN (F.).** — Leçons sur les Mathématiques. 6 fr. »
- LEGENDRE (A. M.).** — Théorie des Nombres. Nouvelle édit. 2 vol. 40 fr. »
- TANNENBERG.** — Leçons sur les applications géométriques du calcul infinitésimal 6 fr. »
- FABRY (E.).** — Problèmes et Exercices de Mathématiques générales, 1910 10 fr. »
- ANDOYER (H.).** — Cours d'Astronomie. 2 vol. 1909-1910. 22 fr. »
- HADAMARD (J.).** — Leçons sur le calcul des variations. T. 1^{er}, 1911 18 fr. »
- SOMMER.** — Introduction à la Théorie des nombres algébriques, 1911 15 fr. »
- BURALI-FORTI et MARCOLONGO.** — Calcul vectoriel et applications, 1911. 8 fr. »
- HEYWOOD et FRÉCHET.** — L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique, 1912. 5 fr. »
- LALESKO.** — Introduction à la Théorie des Equations intégrales, 1911 4 fr. »
- FABRY (E.).** — Théories des Séries à termes constants. Applications aux calculs numériques, 1912 6 fr. 50
- BOREL (E.).** — Eléments de la Théorie des probabilités. 2^e édit. 1910 6 fr. »
- POINCARÉ (H.).** — Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. 2^e édition, 1913 12 fr. »
- SVANTE ARRHÉNIUS.** — Conférences sur quelques Thèmes choisis de la Chimie physique, 1912. 3 fr. »
- DARBOUX (G.).** — Éloges académiques et Discours, 1912. In-12 de 528 pages avec portrait. 5 fr. »
- AMAGAT (E. H.).** — Notes sur la physique et la Thermodynamique, 1912 6 fr. »
- COSSERAT (E. et F.).** — Théories des corps déformables, 1909. 6 fr. »
- BURALI-FORTI et MARCOLONGO.** — Analyse vectorielle générale. — I. Transformations linéaires, 1912. 6 fr. 75
- DUHEM (P.).** — Thermodynamique et Chimie. 2^e édition, 1910. 16 fr. »
- PERRY (J.).** trad. DAVAUX. — Mécanique appliquée. Tome I^{er}. L'Énergie mécanique (avec 205 fig.), 1913. 10 fr. »







BIBLIOTHEQUE NATIONALE DE FRANCE



3 7531 06767104 1